LUANNA PRANDO CILER

TEOREMA DE TALES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática Aplicada do Centro Ensino Universitário do Norte do Espírito Santo da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Genilson Ferreira da Silva

SÃO MATEUS
2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela dádiva da vida, por iluminar minha jornada até a vitória e por me dar esperança nos momentos difíceis.

À minha mãe, Marilene, por ser meu porto seguro, por dividir as alegrias e frustações e por toda a família que sempre me deram força pra continuar.

Ao meu orientador, Genilson, pela paciência, boa vontade e, principalmente, pelas repreensões que me fizeram amadurecer.

À todos os professores que contribuíram para minha formação e serviram de modelo para me espelhar.

À todos os meus amigos que estiveram por perto nessa caminhada, que me ensinaram coisas que levarei para o resto da vida. Guardarei todos na memória, com muito carinho.

Muito obrigada!

“A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos."

Tales de Mileto

RESUMO

Esta pesquisa apresenta a evolução do teorema de Tales ao longo da história por meio de três demonstrações consagradas pelo tempo. Ela visa discutir as limitações da matemática envolvida nessas demonstrações como, por exemplo, o conceito de proporcionalidade que evoluiu conforme as descobertas e o formalismo em matemática foram apresentados. As provas abordadas são a original feita por Tales, a realizada pela escola pitagórica e a que se apresenta no livro VI de Os elementos de Euclides contendo a nova teoria da proporção de Eudoxo de Cnido. Será exibido também, um esboço da vida de Tales de Mileto abordando suas viagens e alguns feitos pessoais, porém mantendo um enfoque maior em suas realizações matemática para um melhor entendimento do objeto de estudo deste trabalho. No final será apresentado o esboço de uma prova do teorema para os números reais usando alguns fatos de análise envolvendo o conceito de completude dos números reais, ou seja, continuidade.

Palavras-chave: Teorema de Tales – teoria da proporção – números comensuráveis - números incomensuráveis.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Teorema de Tales, também conhecido como Teorema da Proporcionalidade de Segmentos, é um dos mais importantes teoremas da geometria elementar e, sua importância histórica, não se restringe às aplicações na geometria, mas ao início de toda a estrutura lógica e dedutiva que embasa as demonstrações matemáticas.

Tales (640-546 a.C.) foi o responsável por sistematizar e organizar as demonstrações geométricas e dar início a uma nova era para a matemática. Seu teorema, geralmente enunciado como: “Se duas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão dos segmentos correspondentes da outra”, possui uma série de aplicações no campo da geometria, como relações de triângulos e ângulos e, além disso, constitui uma importante ferramenta para o cálculo de distâncias inacessíveis.

Esse teorema teve três grandes demonstrações ao longo da história, as quais serão apresentadas neste trabalho não só pela demonstração em si, mas também pelo avanço da matemática obtido em cada uma. A primeira delas é a formulada por Tales de Mileto, tempos depois, a Escola Pitagórica voltou a demonstrar o teorema com algumas alterações e, por fim, após o marco da nova Teoria da Proporção de Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.), Euclides escreveu a demonstração completa.

Atualmente, temos alguns resultados que detalham melhor a demonstração e, utilizando os recursos mais atuais da matemática, temos uma prova mais completa.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

2.1 ALGUNS FATOS EM GEOMETRIA

Por volta do século VII a.C. já havia alguns resultados matemáticos importantes que permeavam a história. Em suma, a maioria era proveniente do cotidiano, da necessidade de medir, pesar, ganhar e até mesmo dar valor. Com isso, vieram as operações básicas (aritmética), figuras semelhantes e iguais (geometria), moedas e seu sistema financeiro, entre outros.

Os matemáticos gregos desse tempo enfrentavam a questão de relacionar grandezas de mesma espécie, como dois pesos, volumes, ou segmentos de reta. Ao se fazer a razão entre as medidas dessas grandezas, existisse um certo número inteiro k, divisor comum do numerador e denominador, essas grandezas seriam ditas comensuráveis, por ser possível medi-las simultaneamente com a mesma unidade k.

Até então, parecia plausível a ideia de que sempre irá existir um k, mesmo muito pequeno, que seja divisor comum do numerador e denominador, da razão entre grandezas. Portanto é compreensível a crença de que os números comensuráveis fossem suficientes para comparar grandezas.

Desta forma dois números são comensuráveis se o quociente entre eles é uma fração com numerador e denominador inteiros, isto é, se sua razão é um número racional.

Uma teoria vinculada a esses números é a Teoria da Proporção, a qual diz que duas quantidades eram proporcionais quando a razão entre elas era um número inteiro. As definições referentes a essa Teoria da Proporção baseou duas das três demonstrações discutidas ao longo deste trabalho e, por não contemplar os números incomensuráveis, foi a responsável pelo fato das demonstrações terem sido revistas.

Por volta de 450 a.C. os pitagóricos descobriram os números incomensuráveis por meio da diagonal do quadrado de lado 1. Em outras palavras, existiam numerador e denominador que não possuíam divisores comuns. Como consequência, dois números são incomensuráveis se sua razão não é um número racional, ou seja, irracional.

Euclides, no livro X, traz na definição 1 que:

> Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível (2009, p. 353).

Na cultura grega do século VII a.C. as noções de simetria, paralelismo, congruência e de toda geometria estão expressas nas construções e obras de arte. Segundo Lintz (2007, p.93) o começo das construções de templos e altares foi com as proporções do corpo humano, as dimensões de dedos, mãos, pés, cúbito (do cotovelo à ponta dos dedos) e foram evoluindo. Desta forma,

> […] a arquitetura grega, por sua cuidadosa proporção e simetrias espaciais, constitui um verdadeiro tratado de geometria escrito em pedra e mostra que a matemática, como organismo, existe latente em formas muito variadas antes de adquirir vida e expressão próprias (LINTZ, 2007, p. 96).

Como templos, estátuas, pinturas e toda arte são documentos visíveis, é difícil saber qual o nível de abstração dos gregos para as propriedades aplicadas, mas podemos ter certeza das propriedades que eles conheciam e praticavam.

Sabe-se que quando mencionam congruência de figuras planas, não se referem aos ângulos e medida de segmentos côngruos, mas ao fato de possuírem a mesma área. Portanto, um triângulo só é congruente a outro se ambos tiverem a mesma área e, esse conceito de congruência de figuras planas é utilizado nas três demonstrações históricas.

2.2 CONHECENDO TALES DE MILETO

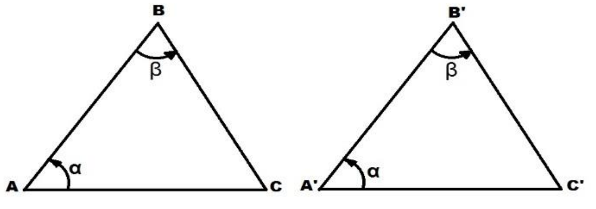
A história antiga é repleta de lacunas, pois os documentos não resistiram ao tempo e às guerras. As informações obtidas, geralmente, estão apoiadas em resumos de obras posteriores e neles estão implícitas as opiniões e incertezas que tornam as informações, no mínimo, duvidosas. Não é diferente quando buscamos a história de vida de Tales de Mileto, seus feitos são imprecisos e de uma enorme variação, pois suas obras foram perdidas e o que se tem está impregnado de interpretações subjetivas que dificulta discernir ficção de fatos.

No que diz respeito a sua vida, autores como Boyer (2010) e Struik (1992) concordam que Tales viveu por volta do século VII a.C. (640-546 a.C.) e em vida foi mercador, filósofo, engenheiro, matemático e astrônomo, sendo considerado o primeiro dos Setes Sábios. Todos os aspectos de sua vida contribuíram para a ascensão de Tales como um grande matemático.

Sendo um hábil mercador tornou-se rico, o que lhe permitiu viajar com frequência. É constante nos livros a história em que Tales previu, usando da observação climática, o ano que obteriam boa safra de azeitonas e então comprou o direito de uso das prensas de azeite com antecedência e por um preço baixo. No ano determinado, o clima foi favorável à cultura de azeitonas e, monopolizando as prensas, gerou fortuna, fazendo isso não apenas para obter lucros, mas também para provar que a ciência pode ter uma aplicação prática.

Com o sucesso como mercador, pode viajar e teve seu entusiasmo pela matemática aumentado em suas viagens ao Egito e Babilônia, o que lhe proporcionou um maior contato com fórmulas e resultados matemáticos usados por comerciantes, sem a menor preocupação com a comprovação de sua veracidade.

No Egito se passa um dos seus maiores feitos, que foi medir a altura de uma pirâmide pela relação entre o comprimento de sua sombra e a sombra de um bastão, medidas ao mesmo tempo. Segundo Lintz ele basicamente usa o seguinte conceito:

> Sejam ABC e A’B’C’ dois triângulos com dois ângulos α, β respectivamente iguais a α’, β’,
>
> 
>
>
> Então vale a proporção $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ (2007, p.105).

Isso tendo em vista que o quociente pertence ao conjunto dos Racionais. Com esse conceito de proporção também lhe concederam o mérito do método para calcular a largura de um rio, a distância de um barco que se aproxima, entre outros problemas com a semelhança de triângulos.

A astronomia egípcia também lhe cativou a tal ponto que foi lhe atribuído o feito de prever o eclipse solar de 585 a.C., embora muitos historiadores da ciência duvidem que os meios existentes na época permitissem tal proeza. Por isso, julga-se hoje, que esta previsão se deve exclusivamente ao entusiasmo de alguns historiadores, a fim de aumentar seus feitos e suas glórias.

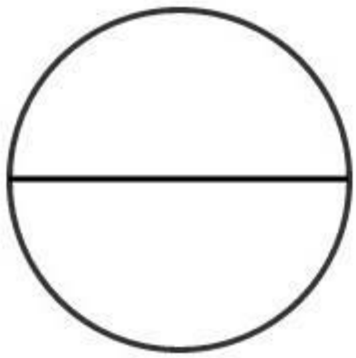
Struik (1992) considera que a essência grega de Tales, de colocar a questão do porquê, o permitiu a concepção da ideia de demonstrar o que lhe era proposto como verdade e, assim,

> Os primeiros estudos de matemática grega tinham um objetivo principal: compreender o lugar do homem no universo de acordo com o esquema racional. (...) Era a mais racional de todas as ciências e, embora existam poucas dúvidas quanto à aquisição da matemática oriental pelos mercadores gregos, através das rotas comerciais, os Gregos descobriram depressa que os Orientais tinham deixado por fazer a maior parte da sua racionalização (STRUIK, 1992, p.73).

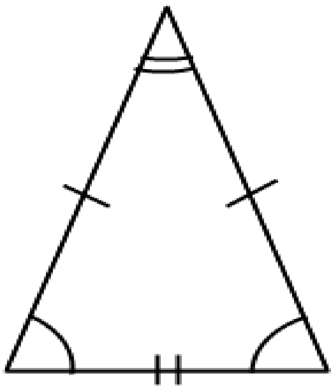
Começou, então, uma nova matemática à margem do racionalismo grego e a geometria demonstrativa usada atualmente é uma prova disso. Segundo Boyer (2010, p. 32) "Tales foi frequentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro – originador da organização matemática dedutiva". Tem-se por ele o início da relação entre geometria e aritmética, que se desenvolveu conforme a evolução da matemática.

Apesar de não haver provas suficientes Eves (2004, p. 95) ainda atribui a Tales os seguintes teoremas:

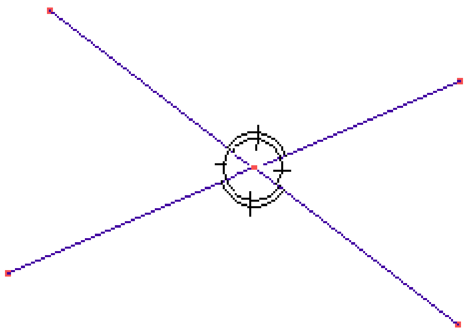
- Um círculo é bissectado por um diâmetro;



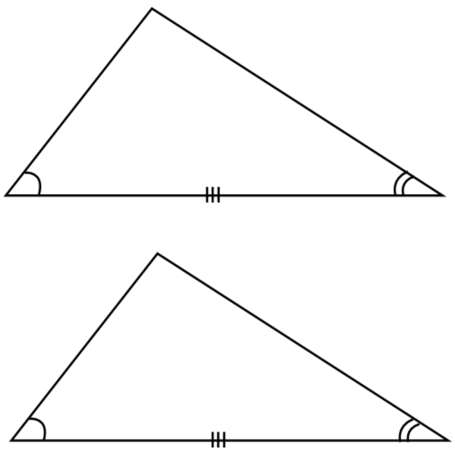
- Os ângulos da base de triângulo isósceles são iguais;



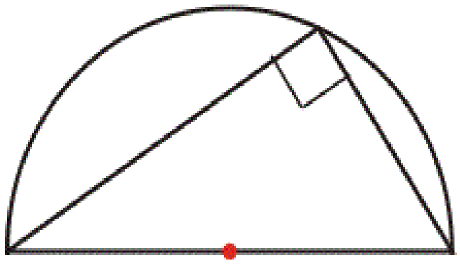
- Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais;



- Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado são iguais, respectivamente, a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes;



- Um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto.



Depois de todos seus feitos, Tales ainda se tornou o fundador da Escola Jônica, uma escola de pensamento dedicada à investigação da origem do universo e de outras questões filosóficas, entre elas, a natureza e a validade das propriedades matemáticas dos números e das figuras.

3 DEMONSTRAÇÕES AO LONGO DA HISTÓRIA

Existem três demonstrações formais durante os tempos que merecem destaque, pois são marcos da evolução da matemática que permitem a análise do progresso da ciência fundamental para o funcionamento da sociedade atual. Duas dessas provas estão situadas no período pré-eudoxiano, com falhas por falta de resultados que foram descobertos posteriormente às suas consagrações, e a outra no período eudoxiano, presente na obra Os Elementos de Euclides.

A primeira demonstração desse teorema foi apresentada por Tales. A matemática que baseou esta prova era limitada, o que se tinha estava relacionado à Teoria da Proporção, de sua época, e ao conceito de número comensurável. Essa limitação acarretou grandes falhasàdemonstração.

A escola pitagórica também formulou uma demonstração para o teorema, tentando corrigir as falhas da demonstração anterior. Apesar de ter alguns avanços no campo da geometria o conceito de proporção empregado é o mesmo que Tales utilizou em sua prova, assim a falha também provém da limitação da matemática de seu tempo.

Na terceira já se utiliza a nova Teoria da Proporção realizada por Eudoxo, ela abrange o conjunto dos números incomensuráveis tornando a demonstração completa. Essa prova se encontra com uma linguagem mais complexa que a atual.

O teorema estudado, geralmente, se encontra enunciado da seguinte forma: “Se duas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão dos segmentos correspondentes da outra”, também encontrado como “Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais”. Essa demonstração predomina nos livros didáticos aos quais fazem apenas um comentário sobre a validade da prova para o conjunto dos números irracionais.

3.1 PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO

A prova do teorema formulado por Tales foi baseada nos conceitos de números comensuráveis, a Teoria da Proporção, além de paralelismo, congruência e semelhança de triângulos.

Uma das demonstrações do livro História da Matemática do autor Rubens G. Lintz traz, em uma linguagem matemática atual, a demonstração que Tales teria formulado. Ele emprega o conceito de números da época de Tales, no qual “número é uma coleção de unidades e, por sua vez, unidade é um ponto sem posição” (LINTZ, 2007, p.124). Então sua demonstração é apresentada da seguinte forma:

> **Proposição:** Se duas retas a e b são cortadas por retas paralelas, os vários segmentos determinados em a e b são proporcionais, isto é
>
> $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots$$

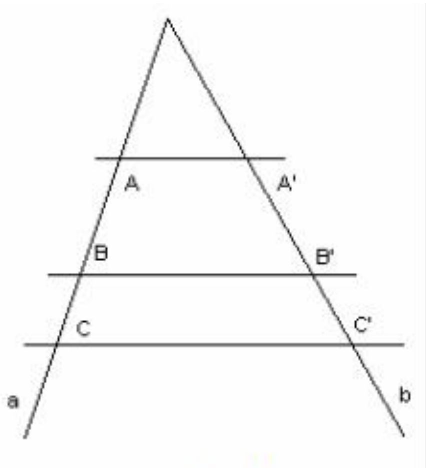


Figura 1

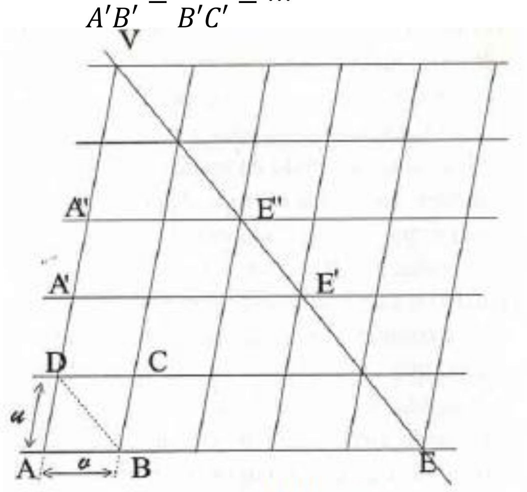


Figura 2

> **Demonstração**
> Tomemos um segmento u como unidade e construamos o reticulado da figura 2, formado de dois feixes de retas paralelas, definindo o quadrilátero ABCD, etc., (figura 2) de lados u e v. Consideremos as duas retas VA e VE e as paralelas AE, A’E’, A’’E’’. Então, diretamente da figura, vem
>
> VA’’ = 2u VE’’ = 2w
> VA’ = 3u VE’ = 3w
>
> onde w é o segmento DB tomado como unidade de medida das retas paralelas a DB
> .(...)
> Das relações acima, tiramos
>
> $$\frac{VA''}{VA'} = \frac{2}{3} = \frac{VE''}{VE'}$$
>
> O resultado facilmente se generaliza para a situação da figura 2, desde que,os segmentos determinados nas retas a e b sejam múltiplos,respectivamente, de unidades u e v pré-estabelecidas. Esta hipótese da existência de unidade comum para medir segmentos está ligada à questão da comensurabilidade de segmentos de grande

profundidade e importância para a geometria e que vai culminar com a crise da escola pitagórica (...) (LINTZ, 2007, p.108-111).

Quando se pensavam em divisores, logo se imaginava uma malha quadriculada sob a figura e, dessa forma, o divisor dos segmentos na reta transversal *a* é o mesmo na reta *b*. Assim, a prova do teorema é válida para segmentos congruentes, mas falha no caso dos segmentos não congruentes e, tempos mais tarde, a generalidade dessa prova foi contestada e a demonstração reformulada.

3.2 NA ÉPOCA DA ESCOLA PITAGÓRICA

A demonstração da Escola Pitagórica levou em consideração os segmentos não congruentes. Nesta altura já estavam bem difundidos conceitos acerca das propriedades dos triângulos e a teoria da proporção, apesar desta ainda está vinculada apenas aos números comensuráveis.

A teoria dos números incomensuráveis estava no começo, portanto não estava completa e aceita pelos matemáticos, então não foi abordado na demonstração. A grande falha dessa prova consiste em, justamente, não abranger esses ‘novos’ números, assim, não validando sua generalização.

Essa demonstração também está presente no livro História Da Matemática do autor Lintz da seguinte maneira:

> **Proposição:** Se duas retas **a** e **b** são cortadas por um certo número de paralelas, estas determinavam sobre **a** e **b** segmentos proporcionais, isto é,
> $$\frac{VA}{VA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} (Lintz, 2007, p. 127).$$

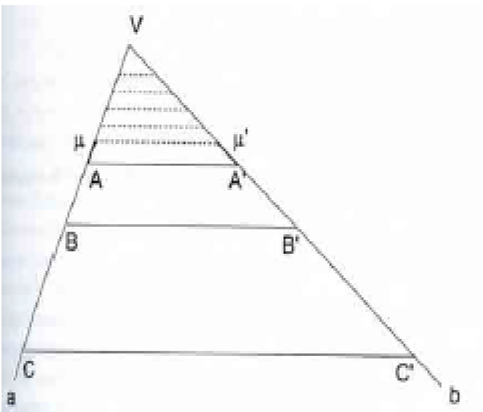


Figura 3

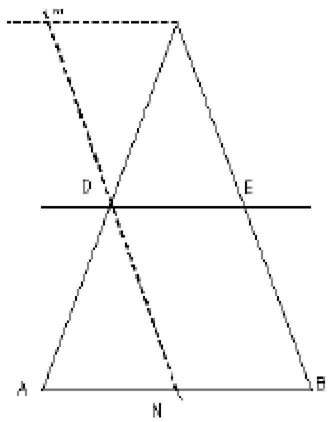


Figura 4

Demonstração
De acordo com a hipótese fundamental acima enunciada, existe uma unidade ou módulo **u** em **a** tal que

$$VA = pu; AB = qu(1)$$

Assim, VA fica subdividida em **p** segmentos e AB em **q** segmentos. O teorema ficará demonstrado se provarmos que, traçando-se as paralelas tracejadas a AA' e BB', também VA' e A'B' ficam subdivididos no mesmo número de partes iguais e, neste caso, se **u'** é uma dessas partes teremos

$$VA' = pu'; \; A'B' = qu' (2)$$

donde, comparando (1) e (2),

$$\frac{VA}{VA'} = \frac{pu}{pu'} = \frac{u}{u'} = \frac{qu}{qu'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Provemos, então, a asserção acima, que se reduz à seguinte: dado um triângulo ABC (figura 4) e o ponto médio D de um dos lados, se traçarmos por D uma paralela a AB, ela divide CB em duas partes iguais CE e EB. De fato, tracemos por D uma paralela a CB e por C, uma paralela a AB. Agora usaremos o fato de serem iguais segmentos determinados em duas paralelas cortadas por outras duas. Os pitagóricos seguramente conheciam este fato que, nos elementos de Euclides, pode ser obtido facilmente do teorema sobre ângulos alternos e igualdade de triângulos, mas é provável que eles o conhecessem através de "demonstrações incompletas", quando comparados ao padrão de Euclides. Enfim, assumindo isso, os triângulos DMC e AND são iguais e, portanto, DM = DN; mas DM = CE e DN = EB, logo CE = EB. (LINTZ, 2007, p. 128).

Lintz (2007, p.129) ainda chama atenção para o fato de que na hipótese, está claro a associação do segmento a um número pela escolha de uma unidade, portanto se pode operar com segmentos como se fossem números e, para isso, é de fundamental importância que dois ou mais segmentos possuam uma unidade comum, o que não é válido para os números incomensuráveis, como por exemplo, a razão da diagonal do quadrado e seu lado.

De uma forma mais simples, será exposta uma demonstração, baseada na da Escola Pitagórica, como geralmente se apresenta em livros didáticos, mas são imprescindíveis alguns resultados antes.

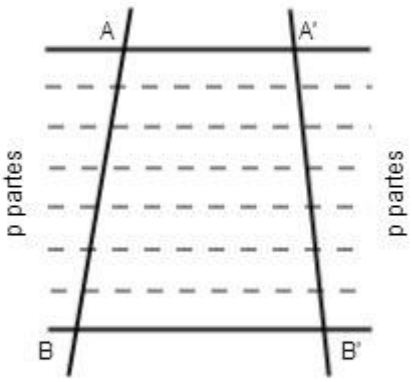
Definição 3.2.1: O feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares entre si que não possuem ponto em comum.

Definição 3.2.2: Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.

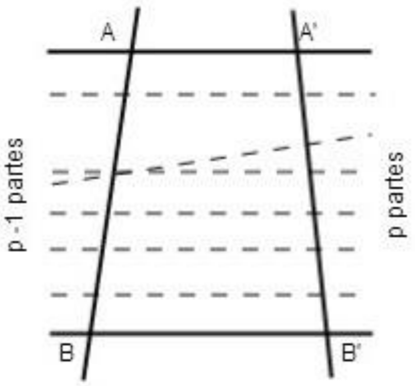
Proposição 3.2.1: Se duas retas são transversais de feixe de retas paralelas distintas e uma delas é divido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal é também dividida em p partes e essas partes são congruentes entre si.

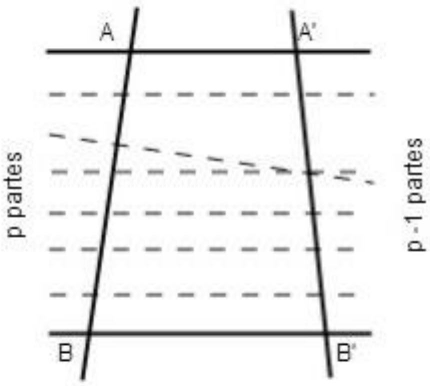
Demonstração:

Sejam duas retas transversais ao feixe de retas paralelas distintas. Tome um de seus segmentos e seu correspondente, $\overline{AB}$ e$\overline{A'B'}$ respectivamente, sendo $\overline{AB}$ dividida em *p* partes por retas do feixe.

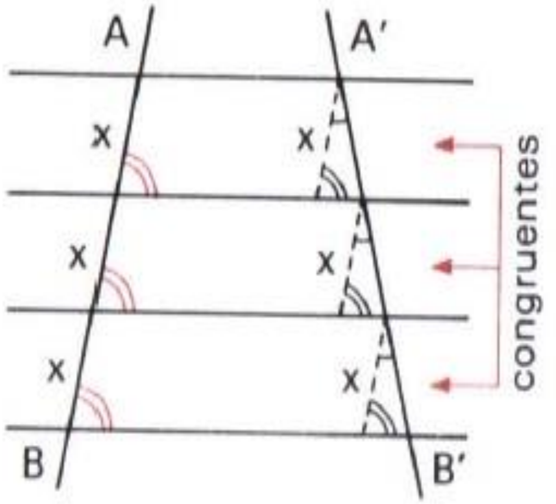


Se $\overline{A'B'}$ fosse dividida em menos partes pelo menos duas retas do feixe iriam se encontrar em pontos de $\overline{AB}$, o que gera uma contradição pois as retas do feixe são paralelas. De modo análogo caso $\overline{A'B'}$ fosse dividido em p-1 partes. Logo o correspondente $\overline{A'B'}$ é dividido em *p* partes.





Partindo dos pontos de divisão de $\overline{A'B'}$ traçamos segmentos paralelos a $\overline{AB}$, formando paralelogramos, de lado x,e triângulos para cada divisão com o feixe.



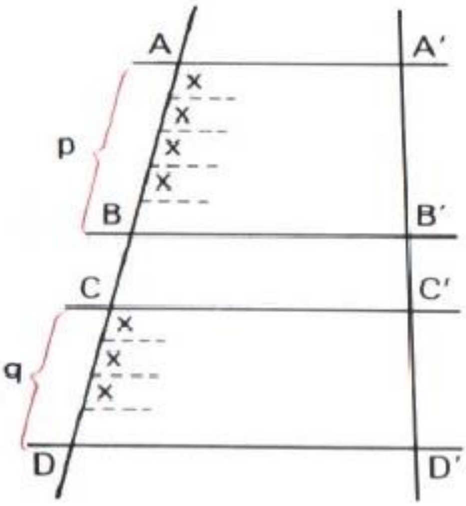
Dos ângulos correspondentes do paralelogramo e do caso de congruência ALA os triângulos formados pelo segmento paralelo a $\overline{AB}$ são congruentes. Portanto, $\overline{A'B'}$ é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

Teorema de Tales: Se duas retas são transversais de feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual a razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Demonstração:

Sejam $\overline{AB}$ e$\overline{CD}$ segmentos de uma transversal e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ seus correspondentes, respectivamente. Assim temos dois casos, quando $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ pertencem aos racionais e quando pertencem aos irracionais.

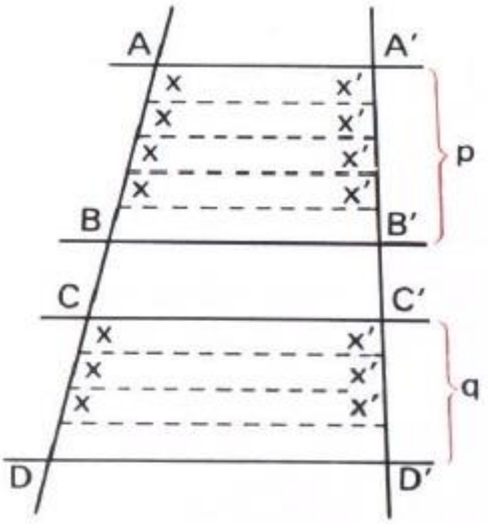
Caso $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sejam racionais, tem-se *x,* tal que *x* seja divisor de $\overline{AB}$ e$\overline{CD}$,



Deste modo

$$\begin{cases} \overline{AB} = px \\ \overline{CD} = qx \end{cases} \quad daí \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \ . \qquad (1)$$

Tendo retas do feixe passando pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e$\overline{CD}$ E aplicando a proposição 3.2.1, temos



$$\begin{cases} \overline{A'B'} = px' \\ \overline{C'D'} = qx' \end{cases} \quad daí \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \ . \qquad (2)$$

Comparando (1) com (2) obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

Sendo válida para segmentos irracionais.

3.3 DEMONSTRAÇÃO PRESENTE NO LIVRO OS ELEMENTOS

Séculos depois da demonstração da escola Pitagórica, Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.) deu uma nova definição à proporção, de modo que abrange os números incomensuráveis. Esta definição está presente no livro V Elementos de Euclides envolto no conceito de magnitude,

> Como primeira aproximação, do ponto de vista matemático, podemos considerar magnitude como algo que pode ser aumentado, diminuído ou agregado a outros objetos da mesma espécie, como por exemplo, um segmento, uma superfície. O essencial da noção de magnitude ou grandeza seria a possibilidade de encontrar seus múltiplos (PEREIRA, 2005, p.35).

Pereira (2005, p.35) ainda comenta o fato de que não se tem conhecimento do uso de tal conceito por parte dos geômetras gregos, mesmo ocupando a maioria das definições necessárias para compreensão da obra e às aplicações desse conhecimento são desconhecidas.

As definições cinco e seis do livro V, abordam a igualdade de razões e o conceito elaborado por Eudoxo, apresentado como:

> 5 - Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, a cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes (EUCLIDES, 2009, p.205).

Atualmente podemos escrevê-lo da seguinte forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, dados inteiros m e n sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$; ou se $ma = nb$, então $mc = nd$; ou se $ma > nb$, então $mc > nd$. Já a definição 6 do livro V (2009, p.205) diz “E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção”.

Boyer faz uma releitura da definição cinco,

> Quatro quantidades estão em proporção *a:b* e *c:d*, se as duas razões *a:b* e *c:d* têm a mesma subtração mútua; isto é, se em cada razão a quantidade menor cabe um igual número inteiro de vezes na maior e o resto em cada caso cabe um igual número inteiro menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes, e assim por diante. (BOYER, 2010, p. 61)

Usando elementos atuais e de uma forma mais simples, ele mostra que a definição de Eudoxo apesar de escrita em linguagem matemática da época, considerada complicada e até mesmo confusa, tem por trás um pensamento simples e de grande valia para a matemática.

Em sua obra, quando Euclides menciona figuras iguais, ele está se referindo a figura com mesma área. Outros resultados, presente nesta obra, que foram utilizados na demonstração são:

Livro 1:

Proposição 38 – Os triângulos, que estão sobre bases iguais, e entre asmesmas paralelas, são iguais.

Proposição 39 - Os triângulos iguais postos sobre a mesma base e damesma parte, estão entre as mesmas paralelas.

Livro V:

Proposição 2 - Se a primeira grandeza for múltiplo da segunda, como a terceira o é da quarta, e se a quinta for múltiplo da segunda, como a sexta o é da quarta; será a primeira juntamente com a quinta múltiplo da segunda, como a terceira juntamente com a sexta o é da quarta.

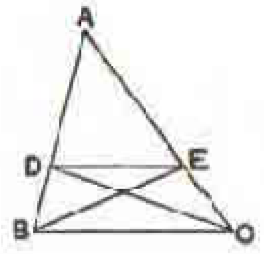
Proposição 7 - As grandezas iguais têm a mesma razão para uma mesma grandeza, e a mesma grandeza tem também a mesma razão para grandezas iguais.

Proposição 9 - As grandezas, que têm a mesma razão para uma mesma grandeza, são iguais entre si, como iguais são também aquelas, para as quais uma mesma grandeza tem a mesma razão.

Livro VI:

Proposição 1 - Os triângulos e paralelogramos, que têm a mesma altura,estão entre si como as bases.

A nova Teoria da Proporção e as proposições acima, basearam a demonstração do Teorema de Tales, presente no livro VI de Os elementos de Euclides proposição 2, e preencheu as lacunas que permeavam as demonstrações dos teoremas anteriores.

> **Proposição 2:** Caso alguma reta seja traçada paralela a um do lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; caso os lados do triângulo sejam cortados, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo.
>
> 
>
>
> **Demonstração:**
>
> Fique, pois traçada a DE paralela a um dos lados, o BC, do triângulo ABC; digo que, como a BD está para DA, assim a CE para a EA.
>
> Fiquem, pois, ligadas as EB, CD.
>
> Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; pois estão sobre a mesma base DE, e nas mesmas paralelas DE, BC; mas o triângulo ADE é algum outro. E as iguais têm para a mesma razão; portanto, como o triângulo BDE está o [triângulo] ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Mas, por um lado. Como o triângulo BDE para o ADE, assim a BD para a DA; pois, estando sob a mesma altura, a perpendicular traçada do E até o AB, estão entre si como as bases. Pelas mesmas coisas, então, como o triângulo CDE para o ADE, assim a CE para a EA; portanto, também como a BD para a DA, assim a CE para a EA.
>
> Mas, então, fiquem cortados os dois lados AB, AC do triângulo ABC, em proporção, como a BD para DA, assim a CE para a EA, e fique ligada a DE; digo que é paralela à BC.
>
> Tendo, pois construídas as mesmas coisas, como a BD está para a DA, assim a CE para a EA, mas por um lado, como a BD para a DA, assim o triângulo BDE para o triângulo ADE, e, por outro lado, como a CE para a EA, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE, portanto, também como o triângulo BDE para o triângulo ADE, assim

> o triângulo CDE para o ADE. Portanto, cada um dos triângulos BDE, CDE tem para o ADE a mesma razão. Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; e estão sobre a mesma base DE. Mas os triângulos iguais e que estão sobre a mesma base, também estão nas mesmas paralelas. Portanto, a DE é paralela à BC.
>
> Portanto, caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção, e caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo; o que era preciso provar (Euclides,2009, p. 233).

Com a grande questão dos incomensuráveis resolvida, aceita e utilizada pelos matemáticos várias outras demonstrações foram revistas e atualizadas culminado na ciência que impera na idade contemporânea.

4 UMA DEMONSTRAÇÃO CONTEMPORÂNEA

Como vimos, o teorema teve vários alterações ao longo da história, cada prova está de acordo com a matemática até então conhecida. A demonstração, que está por vir, não será diferente, serão utilizados recursos da matemática atual.

Hoje estão bem difundidas a ideia de continuidade, proporção, paralelismo, sequência entre outros conceitos que permeiam a matemática contemporânea. Também é bem conhecido, o formalismo empregado na estrutura das demonstrações como hipótese, tese e dedução lógica.

A seguir será exposto alguns resultados e definições para melhor entendermos a demonstração do teorema.

4.1 ALGUMAS DEFINIÇÕES E RESULTADOS DE ANÁLISE E GEOMETRIA

No capítulo dois do livro de Análise Real volume 1 do autor Elon L. Lima, é provado como consequência do conjunto dos números reais ser um corpo ordenado completo, que tem a propriedade arquimediana, que todo intervalo não degenerado I contém números racionais e irracionais.

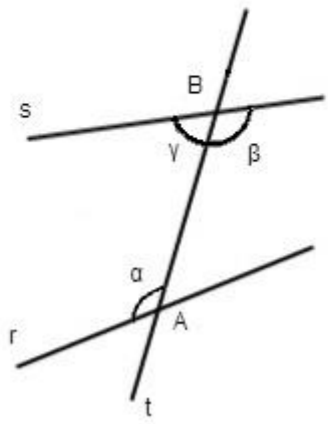
Assim, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1: Dados $x \in \mathbb{R}$ e$n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in \mathbb{Q}$ tal que $x < a_n < x + \frac{1}{n}$.

Segue deste teorema que a sequência de números a_n obtida é convergente para x. As definições e resultados sobre sequências de números reais também podem ser encontrados no capítulo três do livro de Análise Real.

Os seguintes resultados de geometria são encontrados no livro Geometria do autor Antonio C. Neto

Postulado 4.1.1: Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s paralela a r e passando por A.

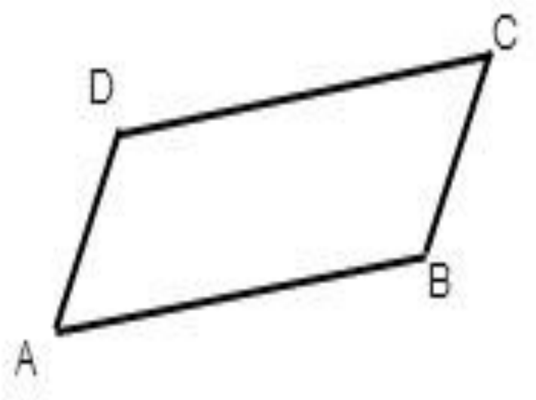


Corolário 4.1.1: Nas notações da figura

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180°.$$

Definição 4.1.1: Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$é um polígono (convexo) se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_\iota A_{\iota+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina.

Definição 4.1.2: Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.

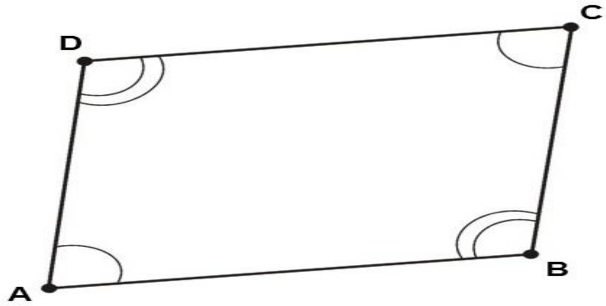


$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \; e \; \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}.$$

Proposição 4.1.1: (teorema da base média de um trapézio) Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos forem iguais.

Demonstração:

Suponha que o quadrilátero convexo ABCD é um paralelogramo. Então $\overleftrightarrow{AD}$ ∥ $\overleftrightarrow{BC}$.



Como os ângulos $\hat{A}$ e $\widehat{B}$ do paralelogramo são colaterais internos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$, temos $\hat{A} + \hat{B} = 180°$. Analogamente, $\hat{B} + \hat{C} = 180°$daí $\hat{A} = 180° - \hat{B} = \hat{C}$ de mesma forma $\hat{B} = \widehat{D}$. Já que $\hat{A} + \hat{B} = 180°$ pelo corolário 4.1.1 temos $\overleftrightarrow{AD}$ ∥ $\overleftrightarrow{BC}$. Da mesma forma, $\hat{B} + \hat{C} = 180°$ assim $\overleftrightarrow{AB}$ ∥ $\overleftrightarrow{CD}$, portanto ABCD tem lados opostos paralelos, logo é um paralelogramo.

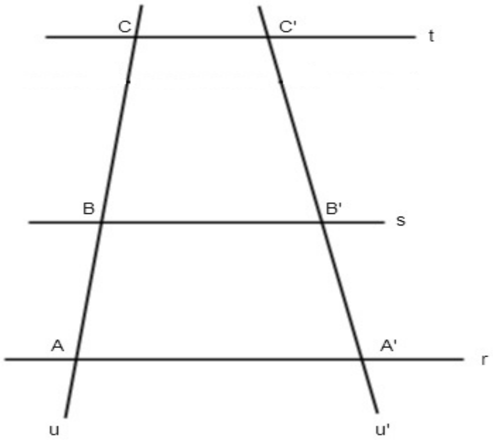
4.2 O TEOREMA DE TALES

Teorema 4.2.1: *(Tales)* Sejam r, s e t retas paralelas. Tem-se pontos A, $A' \in r$,B, $B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que $A, B\ e\ C$ e $A', B'\ e\ C'$ sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Demonstração

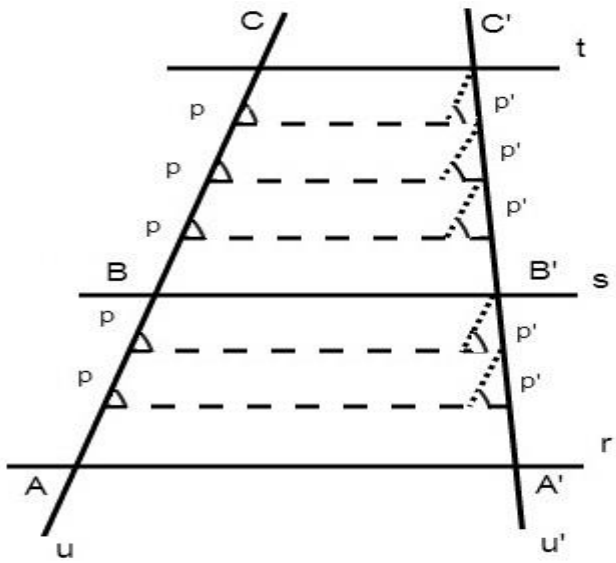
Sejam r, s e t retas paralelas e u e u' retas transversais as paralelas. Tem- se pontos$A$, $A' \in r$, B, $B' \in s$ e $C, C' \in t$ tal que $A, B\ e\ C$ e $A', B'\ e\ C'$ sejam dois ternos de pontos colineares.



Suponha que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja racional. Assim, para a reta u, temos $p \in \mathbb{Z},$ tal que p seja submúltiplo de $\overline{AB}$ e $\overline{BC},$ então$\overline{AB} = mp$ e $\overline{BC} = np$, daí

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}.$$

Traçamos paralelas a r, s e t passando pelas interseções de p com a reta u até u'. Desce-se, dos pontos de interseções de u', paralelas a u formando quadriláteros.



Assim pela proposição 4.1.1existe um p'tal que $\overline{A'B'} = mp'$ e$\overline{B'C'} = np'$

$$\overline{A'B'} = mp' e\ \overline{B'C'} = np' \ \Rightarrow \ \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}.$$

Logo $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

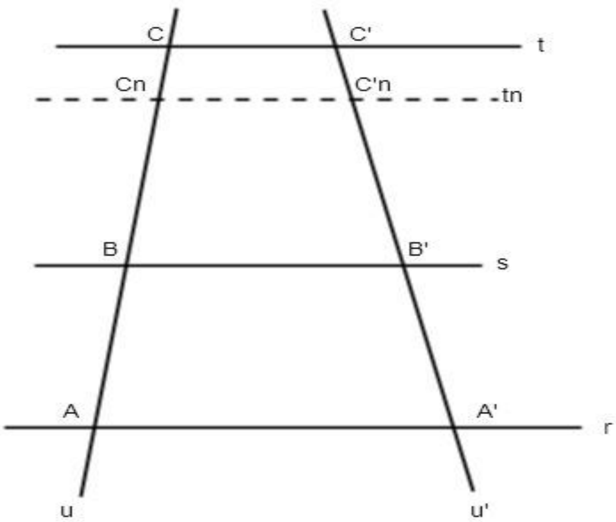
Caso tenhamos $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$, com x pertencente ao conjunto dos números irracional. Temos uma sequência $a_n \in \mathbb{Q}$ que pelo teorema

$$x < a_n < x + \frac{1}{n}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Tome C_n um ponto pertencente a reta u de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n\,.$$

Seja t_n a reta paralela as retas r, s e t que possui C_n e C'_n como interseções com as retas u e u' respectivamente.



Como $a_n \in \mathbb{Q}$,e pela proposição 4.1.1

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} = a_n\,.$$

Deste modo obtivemos

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad x < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}.$$

De $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$ conseguimos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Notemos que na segunda desigualdade se $n \to \infty$ temos $C_n \to C$ e $C'_n \to C'$, ou seja,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \to \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad quando\ n \to \infty.$$

Como $\frac{1}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$ e por (2) vemos que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \to \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Segue da unicidade do limite (Lima, 1989, p.24) que uma sequência de reais quando é convergente não pode se aproximar de dois reais distintos quando $n \to \infty$. Portanto

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Ficando demonstrado o teorema.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um pouco sobre a vida de Tales, alguns de seus feitos, dando ênfase ao teorema que leva seu nome. Exibindo demonstrações em diferentes fases da história da matemática, apontando devidas falhas. Também foi realizado um estudo sobre alguns conceitos de geometria que permeavam os tempos antigos, tais como: paralelismo, congruência ea teoria da proporção.

Ao longo da história, vemos que os conceitos de matemática foram estabelecidos inicialmente por necessidade, após por estética e enfim a abstração.No início não havia a preocupação de formalizar o conhecimento, mas observa-se, por meio da arquitetura e arte, que a prática destes conceitos no cotidiano era abundante.

No século VII a. C. Tales de Mileto deu início ao formalismo matemático, com ênfase na dedução lógica. Isso desencadeou o célebre teorema que carrega seu nome.A crise dos números incomensuráveis contestou duas das três maiores demonstrações da história o que prova que a matemática está em constante mudança.

Ainda que a matemática moderna possua recursos para provar esse teorema de forma completa, raramente é apresentada uma demonstração satisfatória, por causa de alguns detalhes técnicos de análise real, envolvendo propriedades dos números reais tais como: completude, propriedade arquimediana e limites de sequências de números reais. Neste trabalho, apenas deixamos indicados estes detalhes técnicos.

6 REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Ltda, 2007.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar:** geometria plana. São Paulo: Editora Atual, 1997.

EUCLICES. **Os elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. Rio de Janeiro: Editora UNESP, 2009.

EVES, Haward. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004. (Coleção Professor de Matemática).

LIMA, E. L**. Análise Real**. 1. ed.. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

LINTZ, Rubens G. **História da Matemática**. 2. ed. Blumenal: Editora FURB, 1999.

NETO, Antonio C. M. Geometria. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

NIVEN, I. **Números:** Racionais e Irracionais. Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1984. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

OURIQUES, Pedro. **Teorema de Thales**. 2010. Monografia (Trabalho de conclusão de curso) – Centro de ciências e tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

PEREIRA, Ana Carolina. **O teorema de Tales nos livros didáticos de matemática após a avaliação do MEC**: uma comparação entre categorias. 2004. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática) – Universidade Estadual do Ceará.

PEREIRA, Ana Carolina. **Teorema de Thales**: uma conexão entre os aspectos geométricos e algébricos em alguns livros didáticos da matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

STRUIK, Dirk. **História Concisa das Matemáticas**. Tradução: João Cosme Santos Guerreiro. 2. ed. Lisboa: Editora Gradativa, 1992.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE ENSINO UNIVERSITÁRIO DO NORTE DO ESPÍRITO SANTO

LUANNA PRANDO CILER

TEOREMA DE TALES

SÃO MATEUS

2014