Universidade Federal do Espírito Santo

Centro Universitário Norte do Espírito Santo

Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática

Ester Félix Batista

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE PICARD

São Mateus

2018

Ester Félix Batista

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE PICARD

Trabalho submetido ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da UFES (Campus São Mateus), como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

São Mateus

2018

Ester Félix Batista

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE PICARD

Trabalho submetido ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da UFES (Campus São Mateus), como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 06 de julho de 2018.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Leandro Domingues
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Profª Drª Andressa Cesana
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Ms. Genilson Ferreira
Universidade Federal do Espírito Santo

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por me ensinar que nada é impossível para quem tem fé, obrigada por mostrar o seu amor em cada detalhe, por ser a minha força e esperança.

A toda a minha família, meus agradecimentos eternos por toda ajuda, compreensão, apoio e orações. Mas principalmente, para as pessoas que mais amo e admiro, minha mãe Edilma, meu pai José Ricardo e minha irmã Raquel, por tudo que já fizeram e ainda fazem por mim, por todo amor que jamais serei capaz de retribuir, por me ensinarem valores tão ricos que levarei para a vida toda, por abdicarem de tempo e de muitos projetos pessoais para que eu tivesse a oportunidade de estudar e de ter uma boa formação profissional e pessoal, eu devo tudo que sou a vocês.

Meus sinceros agradecimentos a todos os professores que contribuíram para a minha formação, em especial Andressa, Moysés, Leandro e Genilson, seus ensinamentos foram muito além dos conteúdos, vocês nos proporcionaram aprendizados importantes para a vida, tenho por vocês uma enorme admiração e gratidão.

Agradeço aos meus amigos de graduação Vitor, Fabrício, Jader, Elisangela e Chiara, pessoas especiais que Deus colocou na minha vida, sou grata por todo o incentivo e companheirismo, pelos momentos de descontração, essa caminhada se tornou mais leve graças a vocês.

Um agradecimento especial às minhas amigas Bárbara, Larissa, Joana, Mariana e Adriane, por todo amor, por estarem sempre presentes nos meus dias, tornando-os mais agradáveis, pelo alento em momentos difíceis. Vocês fazem parte desta vitória, esta conquista só foi possível porque tive sempre comigo as melhores pessoas do mundo.

Agradeço a todos que de alguma forma estiveram ao meu lado durante estes anos.

Resumo

A modelagem de problemas do mundo real, utilizando as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), é uma ferramenta que pode descrever inúmeros fenômenos. Por este fato, se torna relevante analisar as possibilidades de resolução de tais equações, assim como a existência de soluções. Neste contexto, o objetivo deste trabalho foi apresentar a demonstração do Teorema de Picard, que garante a existência e unicidade de solução para um Problema de Valor Inicial. Para tanto, introduziu-se alguns resultados básicos de Espaços Métricos, visando o entendimento do Teorema de Ponto Fixo de Banach que foi utilizado na demonstração do Teorema de Picard. Para desenvolver este trabalho foi realizado um levantamento bibliográfico em fontes impressas e eletrônicas.

Palavras-chave: Equações Diferencias Ordinárias, Teorema de Picard, Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Sumário

1 Introdução

O estudo das equações diferenciais começou no século XVII com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por Newton e Leibniz (TELLO, 1979). As primeiras aplicações foram nas Ciências Físicas e, subsequentemente em outras áreas. No entanto, mesmo após tanto tempo, as equações diferenciais ainda modelam problemas importantes e atrativos a serem solucionados. Essa é uma área de conhecimento que está entrelaçada ao avanço geral da Matemática (BOYCE; DIPRIMA, 1996).

Uma equação diferencial é uma relação entre curvas, incógnitas e suas derivadas. No início, buscavam-se soluções expressas em termos de funções elementares, isto é, polinomiais, racionais, trigonométricas e exponenciais (NÓBREGA, 2006). Posteriormente, passou-se a expressar a solução na forma de uma integral. Devido a existência de casos em que essas soluções não são adequadas, surgiram as soluções apresentadas por meio de séries infinitas.

A solução geral de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma função que satisfaz à equação dada. (ZILL, 2013) define que uma solução contendo uma constante arbitrária representa um conjunto de soluções chamado *família de soluções*. Isso significa que uma única equação diferencial tem um número infinito de soluções. É o caso da equação diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1$$

que possui como solução geral:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C.$$

Em que C é um número real qualquer, o que fornece uma infinidade de soluções para a equação. Obtém-se assim, uma solução particular quando valores específicos são atribuídos a constante C. Para ilustrar, se $C = 0$, tem-se a solução particular:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x.$$

Assim, uma equação diferencial que é acompanhada do valor da função em um determinado ponto, chamado de valor inicial ou condição inicial, é denominada de *Problema de Valor Inicial* (PVI). Para a resolução de um PVI é importante responder duas questões: A solução desse problema existe? Se existir, é única?

Mediante a essa problemática, o objetivo geral deste trabalho é explorar as circunstâncias que garantem a existência e unicidade de soluções de EDO's com condições iniciais, caracterizando um PVI. A relevância desse resultado pode ser compreendida pela sua utilização na modelagem de problemas reias de várias espécies.

Nesse contexto, visando atender o objetivo proposto, utilizou-se o Teorema de Picard, uma vez que esse garante, sob certas condições, a existência e unicidade de solução para um PVI. Para a demonstração do mesmo, faz-se necessário expressar o PVI por uma função integral, sendo que a nova busca passa a ser encontrar um ponto fixo para esta função. Feito isso, o ponto fixo determinado será a solução do PVI, garantindo a existência.

Dessa maneira, é preciso garantir a existência e unicidade do ponto fixo para tal função. Dentre as alternativas, aplicou-se o Teorema do Ponto Fixo de Banach que é um resultado que fornece um processo iterativo para aproximação do ponto fixo.

2 Preliminares

Neste capítulo, abordamos alguns conceitos acerca de espaços métricos, sequências em espaços métricos, sequências de Cauchy e espaços métricos completos. Tais conceitos são necessários para o entendimento da demonstração do Teorema de Ponto Fixo de Banach e o Teorema de Picard. As definições apresentadas foram baseadas nas literaturas de (LIMA, 2015b), (BARROS, 2013) e (LIMA, 2011).

2.1 Espaços Métricos

Uma *Métrica* sobre um conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$ que é chamado a *distância* de x a y, de modo que para quaisquer $x, y, z \in M$ sejam satisfeitas as seguintes condições:

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M. Em alguns casos, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos apenas "o espaço métrico M", deixando subentendida a métrica d que está sendo usada.

Exemplo 2.1.1. (Métrica zero-um) Qualquer conjunto M não vazio pode se tornar um espaço métrico. Para isto, basta definir a métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$ pondo

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y, \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y \end{cases}$$

Assim, dados $x, y, z \in M$ quaisquer

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) = 1 > 0$;

d3) $d(x, y) = 1 = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) = 1 \leqslant d(x, y) + d(y, z) = 1 + 1 = 2$

Logo, é um espaço métrico.

Exemplo 2.1.2. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um exemplo de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) =\mid x - y \mid$, que é chamada *métrica usual* da reta. Para verificar que $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico basta mostrar que a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) =\mid x - y \mid$ satisfaz as condições da definição. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer,

d1) $d(x, x) =\mid x - x \mid= 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) =\mid x - y \mid> 0$;

d3) $d(x, y) =\mid x - y \mid=\mid y - x \mid= d(y, x)$;

d4) $d(x, z) =\mid x - z \mid=\mid x - y + y - z \mid\leqslant\mid x - y \mid + \mid y - z \mid= d(x, y) + d(y, z)$.

Logo, d é uma métrica em $\mathbb{R}$. Portando $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 2.1.3. (O espaço eucliciano $\mathbb{R}^n$) Seja $\mathbb{E}$ o espaço euclidiano n-dimensional, os ponto de $\mathbb{E}$ são listas $x = (x_1, ..., x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Dados $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ...y_n)$, escrevemos

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

A função $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ é uma métrica em $\mathbb{E}$ e é chamada *métrica euclidiana.*

Exemplo 2.1.4. Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, chamado norma de x, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x, y, z \in E$ e λ escalar:

N1) Se $x \neq 0$ então $\|x\| \neq 0$;

N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

N3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Um espaço vetorial normado é um par $(E, \|\|)$ onde E é um espaço vetorial real e $\|\|$ é uma norma em E. Frequentemente se designa o espaço vetorial normado E, deixando a norma subentendida. Um exemplo de espaço vetorial normado é $(\mathbb{E}, \|\|)$ onde para cada $x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{E}$, se tem

$$\|x\| = \sqrt{\sum (x_i)^2}.$$

Assim, dada a função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, podemos observar que d é uma métrica em E. Dados $x, y, z \in E$,

d1) $d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0;$

d2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) = \|x - y\| > 0;$

d3) $d(x, y) = \|x - y\| = \| - y + x\| = \|(-1)(y - x)\| = | - 1| \cdot \|y - x\| = d(y, x);$

d4) $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$

Portanto todo espaço vetorial normado é um espaço métrico com a métrica proveniente da norma que é dada por $d(x, y) = \|x - y\|$.

Exemplo 2.1.5. (Espaço de funções) Definimos o espaço de funções $C[a, b]$ constituído pelo conjunto das funções contínuas $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ munido da métrica

$$d(x, y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Podemos nos assegurar que d está bem definida, pois o Teorema de Weierstrass[1] nos garante que as imagens das funções contidas em $C[a, b]$ são conjuntos compactos, logo admitem supremo[2]. Sendo assim, mostraremos que d é uma métrica. Sejam x, y, z funções quaisquer em $C[a, b]$, temos

d1) $d(x, x) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - x(t)| = \sup_{t \in [a,b]} |0| = 0;$

[1]A imagem $f(x)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.

[2]Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e não-vazio. Um número $b \in X$ chama-se o supremo de conjunto X (escrevemos $b = \sup X$) quando cumpre duas condições:

1. $\forall x \in X$, tem-se $x \leqslant b$;
2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leqslant c$ para todo $x \in X$ então $b \leqslant c$.

d2) Se $x \neq y$ então $\exists t_0 \in [a,b]$ tal que $x(t_0) \neq y(t_0)$. Assim,

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \geqslant |x(t_0) - y(t_0)| > 0;$$

d3) $d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = \sup_{t\in[a,b]} |y(t) - x(t)| = d(y,x);$

d4) Observe que, para todo $t_0 \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |x(t_0) - z(t_0)| &= |x(t_0) - y(t_0) + y(t_0) - z(t_0)| \\ &\leqslant |x(t_0) - y(t_0)| + |y(t_0) - z(t_0)| \\ &\leqslant \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |y(t) - z(t)|, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} |x(t_0) - y(t_0)| &\leqslant \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \\ |y(t_0) - z(t_0)| &\leqslant \sup_{t\in[a,b]} |y(t) - z(t)|. \end{aligned}$$

Com isso concluimos que

$$\sup_{t\in[a,b]} |x(t) - z(t)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |y(t) - z(t)|.$$

Portanto, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Mais adiante este exemplo será generalizado na Proposição 2.4.5.

Observação 1: A métrica apresentada acima é chamada *métrica do sup* ou *métrica da convergência uniforme*.

Observação 2: Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$, onde X é um espaço métrico, chama-se limitada quando existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant k$, para todo $x \in X$. O conjunto $B(X;\mathbb{R})$ das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$ também admite a métrica do sup.

2.1.1 Topologia

Definição 2.1.6 (Bola aberta e Bola fechada). *Sejam a um ponto no espaço métrico M e $r > 0$ um número real, define-se:*

i) A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior a r:

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

ii) A bola fechada (ou disco) de centro a e raio r é o conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior ou igual a r:

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

Definição 2.1.7 (Conjunto Aberto)**.** *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ diz-se aberto em M, quando todos os seus pontos são pontos interiores a A, isto é, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p;\varepsilon) \subset A$.*

Definição 2.1.8 (Conjunto fechado)**.** *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ é fechado quando seu complementar $F^c = M - F$ é aberto em M.*

Exemplo 2.1.9. Bolas abertas são conjuntos abertos. De fato, seja $r > 0$ e $x \in B(a;r)$ uma bola aberta de centro a e raio r em um espaço métrico M. Pela definição de bola aberta, $d(a,x) < r$ e, portanto, o número $s = r - d(a,x)$ é positivo. Devemos verificar que $B(x;s) \subset B(a;r)$. Com efeito, se $y \in B(x;s)$, então $d(x,y) < s$. Assim, $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r - s + s = r$. Portanto, $d(a,y) < r$ e, consequentemente, $y \in B(a;r)$.

Proposição 2.1.10. *Dados os pontos $a \neq b$ num espaço métrico M, sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s < d(a,b)$. Então as bolas as bolas fechadas $B[a;r]$ e $B[b;s]$ são disjuntas.*

Demonstração. Se existesse algum $x \in B[a;r] \cap B[b;s]$, teríamos $d(x,a) \leqslant r$ e $d(x,b) \leqslant s$, e daí

$$d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,b) \leqslant r + s < d(a,b),$$

um absurdo. □

Definição 2.1.11 (Ponto aderente)**.** *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto a diz-se ponto aderente ao conjunto X quando, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se*

$$B(a;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes a X chama-se fecho de X e é indicado por $\overline{X}$.

Exemplo 2.1.12. Em um espaço métrico M, toda bola fechada é um conjunto fechado. Com efeito, seja $B[a;r]$ uma bola fechada em M e $A = M - B[a;r]$ o complementar da bola. Seja $c \in A$, assim $d(a,c) > r$. Tomemos um número $s > 0$ tal que $r + s < d(a,c)$, Pela Proposição 2.1.10 as bolas $B[a;r]$ e $B[c;s]$ são disjuntas, logo $B[a;r]$ ∩B[c;s]=∅, ou seja, $B(c;s) \subset M - B[a;r]$. Portanto $c \in A$ é ponto interior, o que nos permite concluir que A é aberto e $B[a;r]$ é fechado.

Proposição 2.1.13. *Num espaço métrico, um conjunto é fechado se e somente se contém todos os seus pontos aderentes.*

Demonstração. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Suponha que X seja fechado. Se $a \notin X$, isto é, $a \in X^c$, então como X^c é aberto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \subset X^c$. Assim, $B(a;\varepsilon) \cap X = \emptyset$. Então a não é aderente a X. Reciprocamente, suponha que X contenha todos os seus pontos aderentes. Se $a \in X^c$ então a não é aderente a X, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \cap X = \emptyset$, ou seja, $B(a;\varepsilon) \subset X^c$. Isto significa que X^c é aberto. □

Definição 2.1.14 (Cobertura)**.** *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma cobertura de X é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M, com $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para cada $x \in X$ existe um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.*

Observações:

- Quando cada subconjunto C_λ, $\lambda \in L$, for aberto, diz-se que $\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta.
- Se $L = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ for um conjunto finito, diz-se que $\mathcal{C}$ é uma cobertura finita.

Definição 2.1.15 (Subcobertura)**.** *Sejam M um espaço métrico e $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ um cobertura de $X \subset M$. Se existe $L' \subset L$ com $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, isto é, para cada $x \in X$ existe um índice $\lambda \in L'$ tal que $x \in C_\lambda$, então a subfamília $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}'}$ é uma subcobertura de $\mathcal{C}$.*

Definição 2.1.16 (Conjunto compacto)**.** *Um conjunto K num espaço métrico M é dito compacto quando toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.*

Definição 2.1.17. *Seja M um espaço métrico. Dizemos que M é um espaço métrico compacto quando M é um conjunto compacto.*

Definição 2.1.18. *Um subconjunto X de um espaço métrico (M, d) chama-se limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leqslant c$ para quaisquer $x, y \in X$.*

Segue diretamente da definição que subconjuntos de conjuntos limitados são limitados.

Exemplo 2.1.19. Toda bola $B(a;r)$ é um conjunto limitado. Com efeito, dados $x, y \in B(a;r)$ temos $d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(a,y) < r + r = 2r$. O mesmo se aplica em bola fechada.

Exemplo 2.1.20. Se X e Y são subconjuntos limitados de um espaço métrico M então $X \cup Y$ é limitado. Se $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$ é óbvio. Fixemos um ponto $a \in X$ e um ponto $b \in Y$. Existe $c > 0$ tal que $d(x, a) \leqslant c$ para todo $x \in X$ e $d(y, b) \leqslant c$ para todo $y \in Y$. Então, pondo $k = 2c + d(a, b)$, temos para $x \in X$ e $y \in Y$ arbitrários:

$$d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leqslant c + d(a, b) + c = k.$$

A desigualdade $d(x, y) \leqslant k$ é evidente quando $x, y \in X$ ou $x, y \in Y$. Logo, vale $d(x, y) \leqslant k$ para quaisquer $x, y \in X \cup Y$, o que mostra que $X \cup Y$ é limitado.

Proposição 2.1.21. *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico (M, d_M) é limitado.*

Demonstração: Se K é vazio então K é limitado. Caso contrário, tome $a \in K$. Então $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(a; n)$. Como K é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita

$$K \subset B(a; n_1) \cup \cdots \cup B(a; n_k).$$

Tomando $m := \max\{n_1, \cdots, n_k\}$ temos

$$K \subset B(a; m).$$

Logo, dados $x, y \in K$, temos

$$d_M(x, y) \leq d_M(x, a) + d_M(a, y) \leq m + m = 2m.$$

Portanto, K é limitado. □

2.2 Funções Contínuas

Definição 2.2.1. *Sejam (M, d_M), (N, d_N) espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implica $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$.*

Dizemos que $f : M \to N$ é *contínua* quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$. No caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \to \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$ significa afirmar que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ x \in M, a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$.

Dada uma função $f : M \to N$, suponhamos que existe uma constante $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d(x, y)$ para quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma aplicação lipschitziana. Neste caso, f é contínua. De fato, seja $a \in M$ arbitrário, vamos mostrar que f é contínua em a. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tomemos $\delta = \varepsilon/c$ (onde c é a *contante de lipschitz*), então

$$x \in M,\ d(x,a) < \delta\ \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leqslant c \cdot d(x,a) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua.

Proposição 2.2.2. *Sejam (M, d_M),(N, d_N) espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(U)$ de qualquer conjunto aberto U de (N, d_N) é um conjunto aberto de (M, d_M).*

Demonstração. Suponha que f é contínua e que $U \subset N$ seja aberto. Fixando $a \in f^{-1}(U)$, temos $f(a) \in U$. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $y \in N$ e $d_N(y, f(a)) < \varepsilon$, então $y \in U$. Como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in M$ e $d_M(x, a) < \delta$, então $d_N(f(x), f(a) < \varepsilon$. Portanto, se $x \in M$ e $d_M(x, a) < \delta$, então $f(x) \in U$, ou seja, $B(a; \delta) \subset f^{-1}(U)$. Reciprocamente, para todo $a \in M$ e todo $\varepsilon > 0$, a bola $U = B(f(a); \varepsilon)$ é um aberto em N, contendo $f(a)$. Por hipótese $f^{-1}(U)$ é um aberto, que contém a. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(U)$. Isto significa que se $x \in M$ e $d_M(x, a) < \delta$ implica $f(x) \in U$, isto é, $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$, ou seja, f é contínua em a. □

Proposição 2.2.3. *Sejam M e N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função contínua. Se M é compacto então $f(M)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura por abertos de $f(M)$. Sendo f contínua, pela Proposição 2.2.2, cada $f^{-1}(A_\lambda)$ é aberto e tal que $M \subset \bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(A_\lambda)$. Como M é compacto, existem índices $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tais que $M \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup ... \cup f^{-1}(A_{\lambda_m})$. Logo,

$$f(M) \subset f(f^{-1}(A_{\lambda_1})) \cup ... \cup f(f^{-1}(A_{\lambda_m})) \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_m}.$$

Portanto $f(M)$ é compacto. □

2.3 Sequências

Uma *sequência* num conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$. O valor que a sequência x assume no número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, chamado o *n-ésimo* termo da sequência. Usaremos as notações $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou (x_n) para representar uma sequência.

Uma *subsequência* de (x_n), denotada por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ou (x_{n_k}), é a restrição da aplicação x restrita a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$, ou seja, são escolhidos ordenadamente infinitos valores de (x_n) que associa $1 \mapsto n_1, 2 \mapsto n_2, ..., k \mapsto n_k, ...$ formando assim uma nova sequência.

Exemplo 2.3.1. A sequência $(4, 16, 64, ..., 4^k, ...)$ é uma subsequência de $(2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...)$, na qual $\mathbb{N}'$ é o conjunto dos números pares.

Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M chama-se *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leqslant c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.3.2. Uma sequência constante, ou seja, $x_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$, é limitada pois dado $c > 0$ qualquer temos $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $d(x_m, x_n) = d(a, a) = 0 < c$.

Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Escreve-se $\lim x_n = a$, $x_n \to a$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Quando existe $\lim x_n = a \in M$, diz-se que a sequência (x_n) é convergente.

Exemplo 2.3.3. Toda sequência constante $x_n = a$ é convergente e $\lim x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ qualquer tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) = d(a, a) = 0 < \epsilon$

Proposição 2.3.4 (Unicidade do Limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M. Sejam $a, b \in M$ tais que $a = \lim x_n$ e $b = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Por outro lado, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow d(x_n, b) < \varepsilon$. Tomemos $n_3 = max\{n_1, n_2\}$. Então, $n > n_3$ temos

$$d(a, b) \leqslant d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon$$

Segue que $0 \leqslant d(a, b) < 2\varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$. Com isso, $d(a, b) = 0$. Portanto $a = b$. □

Proposição 2.3.5. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que a aplicação $f : M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que $x_n \to a$ em M implique $f(x_n) \to f(a)$ em N.*

Demonstração. Seja f contínua em a. Se $x_n \to a$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$. A partir de δ obtemos $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_\varepsilon$ implica $d_M(x_n, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Logo, $f(x_n) \to f(a)$ em N. Para a recíproca suponhamos, por absurdo, que f não seja contínua em a. Sendo assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter uma x_n em M, com $d_M(x_n, a) < 1/n$ e $d_N(f(x_n), f(a)) \geqslant \varepsilon$. Isso nos dá uma sequência (x_n) em M, com $x_n \to a$ sem que $f(x_n)$ convirja para $f(a)$, chegando assim em um absurdo. $\square$

Definição 2.3.6. *Diremos que a sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge uniformemente em X para a aplicação $f : X \to M$ quando, para todo número real $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$.*

Proposição 2.3.7. *Sejam M, N espaços métricos. Se uma sequência de aplicações $f_n : M \to N$, contínuas no ponto $a \in M$, converge uniformemente em M para uma aplicação $f : M \to N$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Como f_n converge uniformemente, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$, $\forall x \in M$. Como f_{n_0} é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implica $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) < \varepsilon/3$. Então para todo $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, temos:

$$d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + d(f_{n_0}(a), f(a)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto f é contínua no ponto a. $\square$

Proposição 2.3.8. *Se X é um subconjunto de um espaço métrico (X, d) então $a \in \overline{X}$ se e somente existe uma sequência (x_n) em X tal que $x_n \to a$.*

Demonstração. Suponha que $a \in \overline{X}$. Então para todo $\varepsilon > 0$, $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Em particular fazendo $\varepsilon = 1/n$ (para cada $n \in \mathbb{N}$), existe $x_n \in X$ tal que $x_n \in B(a; 1/n)$, ou seja, $d(x_n, a) < 1/n$. Portanto, $x_n \to a$. Reciprocamente, se $\lim x_n = a$, com $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então toda bola aberta de centro a contém pontos $x_n \in X$. Logo $a \in \overline{X}$. $\square$

2.3.1 Sequências de Cauchy

Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Tomando n como o menor entre m, n e definindo $m = n + p$, a sequência de Cauchy também pode ser definida da seguinte maneira: para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3.9. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M que converge para $a \in M$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Tomando $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n > n_0$ temos,

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, a) + d(x_n, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. □

Exemplo 2.3.10. Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Tomemos a sequência (x_n) de números racionais onde $x_1 = 3,1, x_2 = 3,14, x_3 = 3,141, ...$ com $\lim x_n = \pi$. Esta sequência é convergente em $\mathbb{R}$, logo é de Cauchy. Por outro lado (x_n) não é convergente no espaço métrico $\mathbb{Q}$, já que $\lim x_n \notin \mathbb{Q}$, com isso ela é de Cauchy em $\mathbb{Q}$, mas não é convergente.

Proposição 2.3.11. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Por definição, dado $\varepsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_1 \;\; \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$. Logo, o conjunto $\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, ...\}$ é limitado. Segue que

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, ..., x_{n_1}\} \cup \{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, ...\}$$

é limitado. Então a sequência (x_n) é limitada. □

Exemplo 2.3.12. Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Um exemplo é a sequência $(1, 0, 1, 0, ...)$ em $\mathbb{R}$, embora limitada não é de Cauchy pois $d(x_n, x_{n+1}) = 1, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3.13. *Toda sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico M que possui uma subsequência $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para $a \in M$. Tomando $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_\varepsilon \;\Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon/2,$$

pois a sequência é de Cauchy. Como (x_{n_j}) converge para a, temos que $d(x_{n_j}, a) < \varepsilon/2$ ocorre para todo j suficientemente grande. Então podemos fixar um $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_{j_\varepsilon} > n_\varepsilon \qquad \text{e} \qquad d(x_{n_{j_\varepsilon}}, a) < \varepsilon/2.$$

Portanto,

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) \leqslant d(x_n, x_{n_{j_\varepsilon}}) + d(x_{n_{j_\varepsilon}}, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(observe $n_{j_\varepsilon} > n_\varepsilon$ garante $d(x_n, x_{n_{j_\varepsilon}}) < \varepsilon/2$). Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, temos que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$, ou seja, $\lim x_n = a$. □

2.4 Espaços Métricos Completos

Definição 2.4.1. *Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Exemplo 2.4.2. O espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo, pois no exemplo 2.3.10 vimos uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não é convergente.

Proposição 2.4.3. $\mathbb{E}$ *é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ então pela Proposição 2.3.11, (x_n) é limitada. Por Bolzano-Weierstrass [3] (x_n) possui uma subsequência convergente e, pela Proposição 2.3.13, é convergente. Sendo assim, concluímos que $\mathbb{R}^n$ é completo. □

Proposição 2.4.4. *Se X é um espaço métrico completo e $F \subset X$ é um subconjunto fechado então F é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja $F \subset X$ fechado com X completo e (x_n) uma sequência de Cauchy em F. Como X é completo existe $\lim x_n = a \in M$, e como F é fechado tem-se, pela Proposição 2.3.8 que $a \in F$, logo F é comleto. □

Proposição 2.4.5. *Se X é um espaço métrico compacto e (M, d_M) é um espaço métrico completo, então $(C(X,M), d_c)$ é um espaço métrico completo, onde $C(X,M)$ é o conjunto das funções contínuas $f : X \to M$ e $d_c(f,g) := \sup_{x\in X} d_M(f(x), g(x)),\ \forall f, g \in C(X,M)$.*

Observação: Como por hipótese X é compacto pela Proposição 2.2.3, tomando $f, g \in C(X,M)$ temos $f(X)$ e $g(X)$ são conjuntos compactos e limitados (por 2.1.21). Portanto $f(X) \cup g(X)$ é limitado, com isso d_c está bem definida. Esta é a métrica da convergência uniforme.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C(X,M)$. Então dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ temos

$$d(f_m, f_n) = \sup_{x\in X} d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

[3]Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente. A demonstração pode ser verificada no capítulo 1, Teorema 5 de (LIMA, 2015a).

Com isso, para cada $x \in X$ fixo,

$$d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon, \quad \forall m, n > n_0.$$

Ou seja, para cada $x \in X$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M, e como M é um espaço métrico completo esta sequência converge. Definimos $f(x) := \lim f_n(x), \ \forall x \in X$. Mostraremos que $f_n \to f$, isto é, $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_c(f_n, f) < \varepsilon, \ \forall n > n_0$. De fato, como (f_n) é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} m, n > m_\varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \sup_{x\in X} d_M(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon/2 \\ &\Rightarrow \quad d_M(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon/2, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Tomando $x_0 \in X$ arbitrário, como $\lim f_n(x_0) = f(x_0)$, existe $n_{x_0} \in \mathbb{N}$, que pode ser tomado maior que m_ε, tal que $d_M(f_{n_{x_0}}(x_0), f(x_0)) < \varepsilon/2$. Portanto,

$$m > m_\varepsilon \ \Rightarrow d_M(f(x_0), f_m(x_0)) \leqslant d_M(f(x_0), f_{n_{x_0}}(x_0)) + d_M(f_{n_{x_0}}(x_0), f_m(x_0)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Como x_0 é arbitrário, $d_M(f(x), f_m(x)) < \varepsilon, \ \forall m > m_\varepsilon$. Então, $d_c(f, f_m) = \sup_{x\in M} d(f(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon, \ \ \forall m > m_\varepsilon$. Assim, (f_m) converge uniformemente para f, e pela Proposição 2.3.7, f é contínua então $f \in C(X, M)$. Concluindo que $(C(X, M), d_c)$ é um espaço métrico completo. □

3 Teorema de Ponto Fixo de Banach

Neste capítulo, apresentamos o *Teorema do Ponto Fixo de Banach*, também conhecido como *Teorema das Aproximações Sucessivas*. Esse é um resultado fundamental em espaços métricos, pois garante a existência de um único ponto fixo para uma aplicação sob certas condições.

O nome deste teorema é devido a Stefan Banach, um cientista polonês que contribuiu para avanços na Matemática. Foi responsável por fundar a Análise Funcional Moderna e, entre os vários trabalhos, destacam-se as suas ideias para a teoria das séries ortogonais e de medida e integração. Banach foi quem introduziu o conceito de espaços vetoriais normados e provou vários teoremas dessa área. Os resultados apresentados foram baseadas nas literaturas (LIMA, 2015b), (DUARTE, 2014), (CHINCHIO, 2012), (BARROS, 2013).

Definição 3.0.1. *Seja M um espaço métrico. Dada $f : M \to M$, x é dito ponto fixo de f quando $f(x) = x$.*

Um teorema de ponto fixo é um resultado que estabelece condições para que exista um elemento x no domínio de uma aplicação $f : M \to M$, tal que $f(x) = x$.

Definição 3.0.2. *Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se Contração quando existe uma constante c, com $0 \leq c < 1$, tal que $d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x, y)$ para quaisquer x, y em M.*

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, que veremos a seguir, nos diz que se M é um espaço métrico completo toda aplicação $f : M \to M$ possui um único ponto fixo. Antes de apresentar a demonstração analisamos as hipóteses deste teorema.

Uma das hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach é que o espaço métrico seja completo. Tomando o espaço métrico $M = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, o qual não é completo, e a função $f : M \to M$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. É possível verificar que f é uma contração, pois dados $x, y \in M$ quaisquer, tem-se

$$d(f(x), f(y)) = \left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}(x-y)\right| = \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}d(x,y).$$

No entanto, f não possui ponto fixo em M, visto que

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow x = 1.$$

Este exemplo mostra que, mesmo f sendo uma contração, não é possível obter as conclusões do Teorema do Ponto Fixo de Banach, caso o espaço métrico em questão não seja completo. Quanto a outra hipótese do teorema, basta tomar o espaço métrico completo dos números reais com a métrica usual e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 1$, que não é uma contração. Logo, a função perde a unicidade, já que admite dois pontos fixos que são

$$\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, a conclusão do teorema ficou prejudicada com a falta das hipóteses mencionadas. O Teorema do Ponto Fixo de Banach tem como particularidade, garantir a existência e unicidade do ponto fixo, além de fornecer um processo iterativo que permite encontrá-lo. Para a demonstração, partiu-se de um ponto $x_0 \in M$ arbitrário e aplicou-se f sucessivas vezes, obtendo a sequência $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), ..., x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_0)$. Construída a sequência, será verificado que essa é de Cauchy, sendo assim, convergirá no espaço completo M onde a função f está definida. Em seguida, será mostrado que seu limite é o único ponto fixo da função f. A demonstração deste importante teorema é feita a seguir.

Teorema 3.0.3 (Teorema de Ponto Fixo de Banach)**.** *Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M.*

Demonstração. Dado $x_0 \in M$ arbitrário, tomemos uma sequência (x_n) em M definida por $x_{n+1} := f(x_n)$, $\forall n \geqslant 0$. Mostraremos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. De fato, sabendo que f é uma contração, existe uma constante c, com $0 \leq c < 1$ tal que

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1) \\ d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \leq c^2 d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Usando um argumento indutivo, chegamos a conclusão que $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_1, x_0)$. Pela desigualdade triangular temos que $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leqslant c^n d(x_0, x_1) + c^{n+1} d(x_0, x_1) + ... + c^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= [c^n + c^{n+1} + ... + c^{n+p-1}] d(x_0, x_1) \\ &= c^n [1 + c + ... + c^{p-1}] d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Observe que $[1 + c + ... + c^{p-1}]$ é a soma de uma progressão geométrica de razão c, e portanto, esta soma é dada por $\frac{1-c^p}{1-c}$. Com isso,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant c^n \frac{1-c^p}{1-c} d(x_0, x_1) \leqslant \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$, dado $\varepsilon > 0$ tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c^n < \varepsilon \frac{1-c}{d(x_0,x_1)}$, $\forall n > n_0$, tem-se

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Então (x_n) é um sequência de Cauchy e, como M é um espaço métrico completo, (x_n) é convergente. Agora vamos mostrar que $\lim x_n = a \in M$ é o ponto fixo de f. Como f é contínua pela Proposição 2.3.5 temos $f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$. Logo, a é ponto fixo de f.

Por fim, provaremos a unicidade. Sejam $a, b \in M$ tais que $f(a) = a$ e $f(b) = b$, ou seja, a e b são pontos fixos de f. Assim,

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leqslant c \cdot d(a, b) \Rightarrow d(a, b)(1 - c) \leqslant 0$$

Como $c < 1$, então $1 - c > 0$, logo $d(a, b) = 0$, ou seja, $a = b$. O que conclui a demonstração.

□

Observação. A demonstração acima fornece uma maneira peculiar de se obter o ponto fixo de uma contração f. É possível partir de um ponto arbitrário qualquer e iterando f encontrar um ponto fixo p. Dessa forma, dizemos que *o ponto p é um atrator de f.*

Corolário 3.0.4. *Seja X um espaço métrico completo e a aplicação $F : X \to X$. Se para algum $m \in \mathbb{N}$, F^m é contração, então existe um único ponto fixo p por F.*

Demonstração. Por hipótese, existe algum m tal que F^m é contração, então pelo Teorema 3.0.3 existe um e só um $p \in X$ tal que $F^m(p) = p$. Vamos mostrar que p é o ponto fixo de F. Como $F(F^m(x)) = F^m(F(x))$, para todo $x \in X$, e p é o ponto fixo de F^m, temos

$$F(p) = F(F^m(p)) = F^m(F(p)).$$

O que nos mostra que $F(p)$ também é ponto fixo de F^m. Logo, pela unicidade do ponto fixo de F^m, $F(p) = p$, isto é, p é um ponto fixo de F.
E podemos garantir que este é o único ponto fixo de F, já que todo ponto fixo de de F é também ponto fixo de F^m. Logo, se existisse mais de um ponto fixo para F, existiria mais de um ponto fixo para F^m. □

Observação: É possível demonstrar que o ponto fixo para uma F, como no corolário acima, também é um atrator desde que seja feita a suposição de que F é contínua. Esse resultado não será utilizado para o objetivo proposto, que é demonstrar o Teorema de Picard, mas o leitor interessado pode consultar (TELLO, 1979).

4 Equações Diferenciais

Neste capítulo, discutimos sobre o conceito de Equação Diferencial Ordinária e de um Problema de Valor Inicial (ou de Cauchy) e apresentamos a demonstração do teorema de existência e unicidade de soluções de EDO's com condições iniciais.

Chama-se *Equação Diferencial* uma equação em que a incógnita é uma função, e apresenta uma relação com as derivadas desta função. As equações podem ser classificadas quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

Uma equação diferencial é chamada de *Equação Diferencial Ordinária* quando envolve derivadas de uma função de apenas uma variável. Quando apresenta derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis é chamada *Equação Diferencial Parcial.*

O embasamento teórico foi feito a partir das literaturas (BOYCE; DIPRIMA, 1996), (TELLO, 1979) e (ALVES, 2008).

4.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Seja Ω um subconjunto do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ onde $\mathbb{R}$ é a reta real e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano n-dimensional munido de uma norma $\| \cdot \|$. Um ponto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ será denotado por (t, x), $t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ em $\mathbb{E}$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua e seja I um intervalo não degenerado da reta, isto é, um subconjunto de $\mathbb{R}$ não reduzido a um ponto.

Definição 4.1.1. *Uma função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{E}$ chama-se solução da equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{4.1}$$

no intervalo I se:

i) o gráfico de φ em I, isto é, $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e

ii) $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

A equação (4.1) chama-se *Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem* e é denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x) \tag{4.2}$$

Exemplo 4.1.2. Podemos verificar que $\varphi_1(t) = t^2 \ln t$ é solução da equação

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad t > 0. \tag{4.3}$$

Pois,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= t^2 \ln t, &(4.4)\\
\varphi_1'(t) &= t^2\left(\frac{1}{t}\right) + 2t\ln t = t + 2t\ln t, &(4.5)\\
\varphi_1''(t) &= 1 + 2t\left(\frac{1}{t}\right) + 2\ln t = 3 + 2\ln t &(4.6)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.4), (4.5) e (4.6) em (4.3)

$$t^2(3 + 2\ln t) - 3t(t + 2t\ln t) + 4(t^2 \ln t) = 3t^2 + 2t^2\ln t - 3t^2 - 6t^2\ln t + 4t^2\ln t = 0.$$

Do mesmo modo, podemos mostrar que $\varphi_2(t) = t^2$ também é uma solução da equação (4.3).

Exemplo 4.1.3. Vamos determinar a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \pi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Integrando ambos os membros de (4.7), segue

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{dx} &= \int 2x + \pi\\
y(x) &= x^2 + \pi x + k, \quad k \in \mathbb{R}. &(4.8)
\end{aligned}$$

Logo, (4.8) é a solução geral da equação. Note que a equação (4.7) terá infinitas soluções. Veja na figura 1 o gráfico com a solução geral onde k é uma constante.

Neste exemplo obtemos infinitas soluções. Porém, note que que existe apenas uma solução, por exemplo, onde $y(0) = 0$.

No estudo das equações diferenciais surge uma questão fundamental: Será que uma equação diferencial sempre tem uma solução? A resposta é não. Segundo (BOYCE; DIPRIMA, 1996), a questão da existência de soluções para EDO's não é apenas de interesse

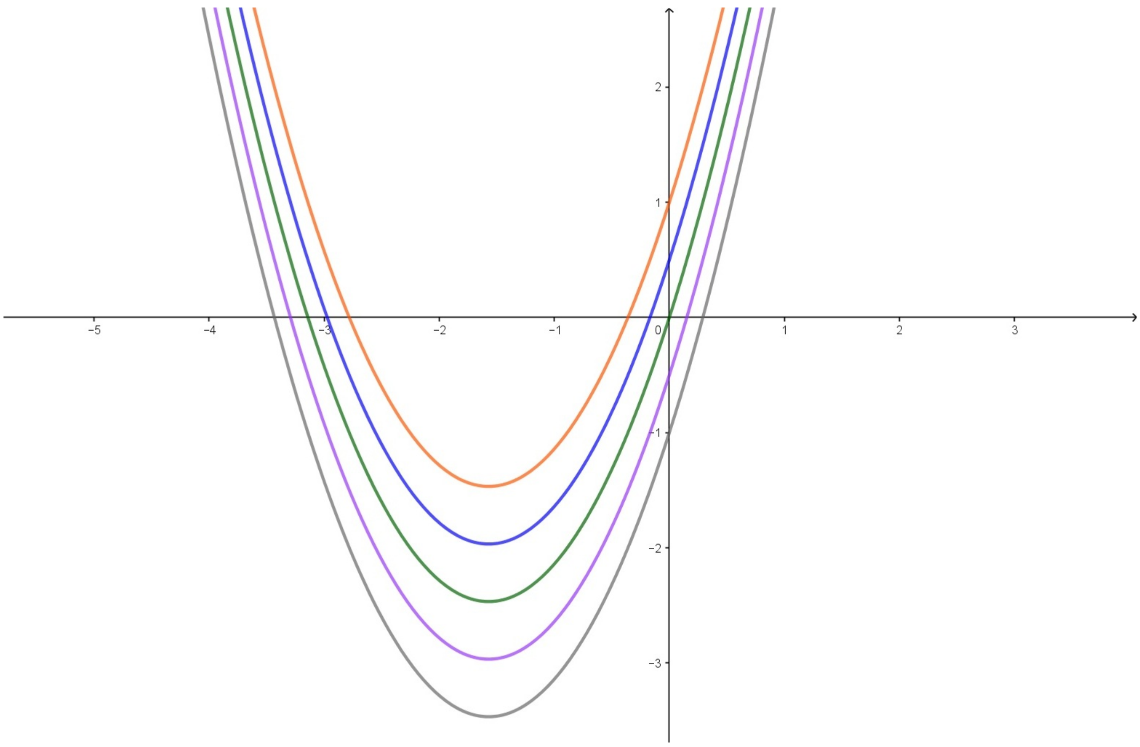

Figura 1: Solução Geral da equação (4.7).

dos matemáticos, pois muitos fenômenos químicos, físicos e biológicos possuem resultados modelados por equações e funções. Visto a grande aplicação das EDO's, muitas vezes, é importante selecionar um membro em particular da família de soluções, o que se faz pela identificação de um ponto particular (t_0, x_0) contido no gráfico da solução. Este problema é chamado *Problema com Dados Iniciais*, também conhecido como *Problema de Valor Inicial*, ou ainda *Problema de Cauchy* e será denotado por

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{4.9}$$

Na demonstração do Teorema de Picard, que será apresentada na próxima seção, não trabalharemos diretamente com um PVI dado, mas com uma equação integral equivalente. O próximo Lema garante a equivalência entre os dois problemas.

Lema 1. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Uma função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução do Problema de Valor Inicial (4.9) se, e somente se, é uma solução da equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{4.10}$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é solução da equação integral (4.10), isto é,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

Então φ é diferenciável e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo [1]

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\varphi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds\right) = f(t, \varphi(t)).$$

Além disso,

$$\varphi(t_0) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))ds = \varphi_0.$$

Reciprocamente, se φ é solução de (4.9), temos

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \qquad \varphi(t_0) = \varphi_0.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,$$

logo

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,$$

assim $\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$, já que $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Como queríamos mostrar. □

4.2 Teorema de Picard

Nesta seção, o Teorema de Picard enunciamos e demonstramos por meio do Corolário 3.0.4 do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para demonstrar, o PVI foi expresso em sua forma integral, que como foi visto no Lema 1, é equivalente. Com isso, encontrando o ponto fixo da função integral que descreve o PVI, encontra-se a solução do problema.

Observação: Na demonstração a seguir será utilizado o seguinte resultado sobre integrais em espaços vetoriais normados

$$\left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|ds \right|.$$

---

[1] **Teorema Fundamental do Cálculo** Suponha que f seja contínua em I

1. Se $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, então $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f.

Não será feita a prova desta desigualdade, mas essa pode ser obtida a partir de determinadas adaptações da literatura (LIMA, 2015a).

Teorema 4.2.1 (Teorema de Picard)**.** *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{E}$*, onde* $\Omega = I_a \times B_b$*,* $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leqslant a\}$ *e* $B_b = \{x \in \mathbb{E}; \|x - x_0\| \leqslant b\}$*, contínua para a qual existe* $K > 0$ *tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant K\|x - y\|, \ \forall t \in I_a \ e \ \forall x, y \in B_b. \tag{4.11}$$

Existe uma única solução de

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \quad t \in I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leqslant \alpha\},$$

onde $\alpha = min\{a, b/M\}$ *e* $M = \sup\limits_{(t,x)\in\Omega} \|f(t, x(t))\|$.

Observações:

- $M = \sup\limits_{(t,x)\in\Omega} \|f(t, x(t))\|$ está bem definido, pois f é contínua e Ω é compacto, logo pela Proposição 2.2.3 a imagem de f é um conjunto compacto. Portanto M existe.

- Temos que $B_b = \{x \in \mathbb{E}; \|x - x_0\| \leqslant b\}$ é uma bola fechada em $\mathbb{E}$ e, como vimos no Exemplo 2.1.12, é um conjunto fechado. Portanto, pela Proposição 2.4.4 B_b é um espaço métrico completo.

Demonstração. Vamos entender o procedimento utilizado nesta demonstração. Converte-se o PVI em uma equação integral, com isso, define-se um operador F. O primeiro passo consiste em mostrar que tal operador F está bem definido em um certo espaço métrico completo. Em seguida, sob as hipóteses do teorema, mostraremos que existe uma certa potência para qual F é uma contração. Feito isso, utilizando o Corolário 3.0.4, concluiremos a existência e a unicidade do ponto fixo para o operador F, o qual será justamente a solução do problema.

Seja $X = C(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo[2] das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \to B_b$, com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$$

<u>*Passo 1*</u>. Vamos mostrar que está bem definido o operador $F : X \to X$ dado, para cada $\varphi \in X$, por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad t \in I_\alpha.$$

[2]Podemos garantir que é completo pela Proposição 2.4.5 que se encontra na página 19.

Para isso, temos que verificar que $F(X) \subset X$. Primeiro vamos conferir se $F(\varphi)(t)$ é contínua. De fato, dados $\varphi \in X, t_1, t_2 \in I_\alpha$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned}
\|F(\varphi)(t_1) - F(\varphi)(t_2)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s,\varphi(s))ds - \int_{t_0}^{t_2} f(s,\varphi(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_2}^{t_1} f(s,\varphi(s))ds \right\| \\
&\leqslant \left| \int_{t_2}^{t_1} \|f(s,\varphi(s))\| ds \right| \\
&\leqslant \left| \int_{t_2}^{t_1} M ds \right| \\
&= M|t_1 - t_2|.
\end{aligned}$$

Então, como vimos na seção 2.2, $F(\varphi)(t)$ é lipschitziana, portanto é contínua. Agora vamos mostrar que $Im(F(\varphi)) = B_b$. Seja $\varphi \in X$ qualquer

$$\begin{aligned}
\|F(\varphi)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds \right\| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi(s))\| ds \right| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} M ds \right| \\
&= |M(t - t_0)| \\
&\leqslant M\alpha \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b.
\end{aligned}$$

Portanto $F(X) \subset X$, e o operador está bem definido.

<u>*Passo 2*</u>. Vamos mostrar que, para algum m, F^m é uma contração. Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in X$,

$$\begin{aligned}
\|F(\varphi_1)(t) - F(\varphi_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))] ds \right\| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))\| ds \right|. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

De (4.11), temos que

$$\left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))\| ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} K \cdot \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \right|. \qquad (4.13)$$

Combinando (4.12) e (4.13), segue que

$$\begin{aligned}
\|F(\varphi_1)(t) - F(\varphi_2)(t)\| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} K \cdot \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \right| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} K d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| \\
&= K \cdot d(\varphi_1, \varphi_2)|t - t_0|, \quad \forall t \in I_\alpha. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
\|F^2(\varphi_1)(t) - F^2(\varphi_2)(t)\| &= \|F(F(\varphi_1)(t)) - F(F(\varphi_2)(t))\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s, F(\varphi_1)(s)) - f(s, F(\varphi_2)(s))] ds \right\| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, F(\varphi_1)(s)) - f(s, F(\varphi_2)(s))\| ds \right|
\end{aligned}$$

por (4.11), segue

$$\left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, F(\varphi_1)(s)) - f(s, F(\varphi_2)(s))\| ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} K \|F(\varphi_1)(s)) - F(\varphi_2)(s)\| ds \right| \qquad (4.15)$$

e por (4.14) e (4.15)

$$\begin{aligned}
\|F^2(\varphi_1)(t) - F^2(\varphi_2)(t)\| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} K \cdot K \cdot d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot |s - t_0| ds \right| \\
&= K^2 d(\varphi_1, \varphi_2) \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds \right| \\
&= K^2 d(\varphi_1, \varphi_2) \frac{|t - t_0|^2}{2}.
\end{aligned}$$

De modo análogo, fazendo para $n = 3$ obtemos

$$d(F^3(\varphi_1)(t), F^3(\varphi_2)(t)) \leqslant K^3 d(\varphi_1, \varphi_2) \frac{|t - t_0|^3}{3!}.$$

Isto nos leva a crer que para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e $\forall n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}$,

$$\|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)\| \leqslant \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha. \qquad (4.16)$$

Vamos provar esta desigualdade por indução sobre n. Para $n = 1$, verificamos em (4.14) que é verdadeira. Suponha que (4.16) é válida para algun $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}\|F^{n+1}(\varphi_1)(t) - F^{n+1}(\varphi_2)(t)\| &= \|F(F^n(\varphi_1)(t)) - F(F^n(\varphi_2)(t))\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s, F^n(\varphi_1)(s)) - f(s, F^n(\varphi_2)(s))] ds \right\| \\ &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, F^n(\varphi_1)(s)) - f(s, F^n(\varphi_2)(s))\| ds \right|\end{aligned}$$

por (4.11)

$$\left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, F^n(\varphi_1)(s)) - f(s, F^n(\varphi_2)(s))\| ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} K\|F^n(\varphi_1)(s)) - F^n(\varphi_2)(s)\| ds \right| \quad (4.17)$$

pela hipótese de indução

$$\left| \int_{t_0}^{t} K\|F^n(\varphi_1)(s)) - F^n(\varphi_2)(s)\| ds \right| \leqslant \left| K \int_{t_0}^{t} \frac{K^n |s - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right|. \quad (4.18)$$

Combinando (4.17) e (4.18), seque que

$$\begin{aligned}\|F^{n+1}(\varphi_1)(t) - F^{n+1}(\varphi_2)(t)\| &\leqslant \left| K \int_{t_0}^{t} \frac{K^n |s - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| \\ &= \frac{K^{n+1}}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2) \left| \int_{t^0}^{t} |s - t_0|^n ds \right| \\ &= \frac{K^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2).\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução finita, a desigualdade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leqslant \frac{K^n \cdot \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$ e, para n grande, podemos obter $0 < \frac{K^n \cdot \alpha^n}{n!} < 1$, ou seja, F^n é uma contração.

Portanto pelo Corolário 3.0.4 existe uma única φ tal que $F(\varphi) = \varphi$ o que conclui a demonstração. □

5 Conclusão

Verificou-se que é possível garantir a existência e unicidade de soluções de EDO's, visto o sucesso obtido na utilização do Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar este resultado. Dessa forma, o objetivo proposto foi alcançado, destacando a relevância do estudo apresentado. É evidente que as EDO's possuem um papel importante em pesquisas científicas de diversas áreas, dado que essas equações instigam o trabalho de conceitos matemáticos relacionados à realidade, não se restringindo somente aos cálculos algébricos. Com isso, auxilia na formação de professores de Matemática com multiplicidade de conhecimentos específicos, pedagógicos, disciplinares e com flexibilidade de pensamento.

No presente estudo não foram discutidos outros resultados sobre a existência e unicidade de EDO's. Portanto, apresenta-se como sugestões para trabalhos futuros o estudo de soluções locais até um intervalo maximal de tempo e a análise do Teorema de Peano, na qual as hipóteses são mais fracas, entretanto a unicidade local das soluções não é garantida.

Referências

ALVES, M. B. *Equações Diferenciais Ordinárias em Cursos de Licenciatura de Matemática - Formulação, Resulução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática*. Belo Horizonte: PUC, 2008. Dissertação de Mestrado.

BARROS, C. D. V. de. *O Teorema de Ponto Fixo de Banach e Algumas Aplicações*. João Pessoa: UFPB, 2013. Dissertação de Mestrado.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

CHINCHIO, A. C. *Introcução às Equações Diferenciais Ordinárias e Algumas Aplicações*. Rio Claro: IGCE, 2012. Dissertação de Mestrado.

DUARTE, I. S. Espaços métricos e o teorema do ponto fixo de banach. *Universidade Estadual da Paraíba*, p. 54, 2014. Trabalho de Conclusão de Curso.

LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de Uma Variável*. 11. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011. Coleçáo Matemática Universitária.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 11. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015. Projeto Euclides.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

NÓBREGA, D. D. *Equações Diferenciais Ordinárias e Algumas Aplicações*. Rio Grande do Norte: UFRN, 2006. Trabalho de Conclusão de Curso.

TELLO, J. M. S. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. 5. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1979. (II).

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais Com Aplicações Em Modelagem*. 9. ed. Sao Paulo: Cengage Learning, 2013.