Universidade Federal do Espírito Santo

Centro Universitário Norte do Espírito Santo

Colegiado do Curso de Matemática Licenciatura

O TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS

São Mateus

2018

Fabrício Bonini Zampirollo

O TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS

Trabalho submetido ao Colegiado do Curso de Matemática Licenciatura do CEUNES/UFES, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

São Mateus

2018

Fabrício Bonini Zampirollo

O TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS

Trabalho submetido ao Colegiado do Curso de Matemática Licenciatura do CEUNES/UFES, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 06 de julho de 2018.

Comissão Examinadora

Prof. Leandro Domingues
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof[a]. Andressa Cesana
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Michel Guimarães Coswosck
Universidade Federal do Espírito Santo

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido lutar pelos meus objetivos e por ter me ajudado a superar todas as dificuldades.

Aos meus pais Domingos Zampirollo e Dalva Bonini Zampirollo, pelo apoio de sempre e pelas palavras de conforto.

Aos colegas e amigos inseparáveis do curso Matemática Licenciatura.

Um agradecimento especial a Jader Schimidt Jrause e a Júlia Bravim por sempre se fazerem presentes por palavras de encorajamento e pelos momentos de lazer.

Agradeço ao meu orientador Prof. Leandro Domingues pelo profissionalismo e por ter acreditado no meu potencial.

À professora Andressa Cesana e ao professor Michel Guimarães Coswosck pela leitura crítica e sugestões dadas ao trabalho.

Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação.

Carl Friedrich Gauss

Resumo

Neste trabalho o foco principal é o estudo do teorema de Aproximação de Weierstrass e do teorema de Stone-Weierstrass, os quais se mostram resultados importantes para a análise matemática. Poder aproximar funções contínuas quaisquer definidas em espaços compactos por sequência de polinômios é interessante, pois, essas últimas são funções regulares. Nesse contexto, o texto foi elaborado para servir de suporte para alunos de graduação. Para isso, buscamos adaptar as demonstrações, presentes nas referências, com maior detalhes nas passagens. Nesse sentido, apresentamos um capítulo preliminar com definições, resultados mais elementares e exemplos de espaços métricos, sequência de funções e espaços métricos compactos. Em seguida, apresentamos duas demonstrações diferentes para o teorema de Aproximação de Weierstrass e, por fim, trouxemos o teorema de Stone-Weierstrass para os casos real e complexo.

Palavras-chave: Stone-Weierstrass, Aproximação de Weierstrass, Sequência de polinômios.

Lista de Figuras

1 Gráfico das φ_n. 21

2 Rampa 27

Sumário

Introdução **8**

1 Preliminares **9**

1.1 Topologia do Espaço Métrico 11

1.2 Sequências 13

1.3 Espaços Métricos Compactos 15

2 O Teorema de Aproximação de Weierstrass **19**

2.1 Teorema de Aproximação de Weierstrass (1ª demonstração) 19

2.2 Teorema de Aproximação de Weierstrass (2ª demonstração) 24

3 O Teorema de Stone-Weiestrass **29**

3.1 Teorema de Stone-Weierstrass (Versão Real) 29

3.2 Teorema de Stone-Weierstrass (Versão Complexa) 33

Conclusão **36**

Referências **37**

Apêndice A – Desigualdade Triangular **38**

Apêndice B – Convergência Uniforme **39**

Apêndice C – Convergência da Série **40**

Introdução

Cheguei no presente assunto de estudo após procurar o professor Leandro Domingues para que me orientasse. Com o intuito de continuar estudando assuntos relacionados à análise matemática ele me incentivou a pesquisar e desenvolver os estudos nessa área, para complementar o que foi estudado na grade curricular da Licenciatura em Matemática.

Nesse sentido, a finalidade deste trabalho é estudar, mais profundamente, e propor demonstrações mais detalhadas de dois importantes teoremas da análise matemática: (i) o Teorema de Aproximação de Weierstrass, que foi demonstrado pela primeira vez pelo matemático alemão Karl Weierstrass em 1885 e que estabelece que toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios; (ii) o Teorema de Stone-Weierstrass, demonstrado pela primeira vez pelo matemático estadunidense Marshall H. Stone em 1937, que reconheceu que o intervalo da reta $[a, b]$ poderia ser substituído por espaços mais gerais.

Elaborado sob a orientação do Professor Leandro Domingues, seu desenvolvimento ocorreu por meio de pesquisas bibliográficas, fazendo uso de livros e trabalhos relacionados ao assunto.

Está divido em três capítulos, onde o primeiro capítulo está centrado no estudo de alguns resultados, definições e exemplos de espaços métricos, sequência de funções e espaços métricos compactos que darão suporte ao estudo dos teoremas citados.

O segundo capítulo é dedicado ao Teorema de Aproximação de Weierstrass, bem como, a uma demonstração alternativa apresentada pelo matemático francês Henri Léon Lebesgue, em 1897, baseada na aproximação de funções contínuas por funções poligonais.

Por fim, no terceiro capítulo se encontra uma demonstração para o Teorema de Stone-Weierstrass para o caso de funções contínuas reais e uma segunda demonstração para funções contínuas complexas.

1 Preliminares

Neste capítulo, nos baseamos nas referências (LIMA, 2015), (LIMA, 2009a), (LIMA, 2009b) e (RIBENBOIM, 2012) para apresentar alguns resultados e definições que serão utilizados ao longo do trabalho.

Para começar, vejamos a seguinte definição:

Definição 1.0.1 (Métrica). *Uma métrica num conjunto $M \neq \emptyset$ é uma função $d : M \times M \to [0, +\infty)$ que associa a cada par de pontos $x, y \in M$, um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:*

D_1) $d(x, x) = 0$;
D_2) *Se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;
D_3) $d(x, y) = d(y, x)$;
D_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
para quaisquer $x, y, z \in M$.

Observação. A propriedade D_4) é conhecida como desigualdade triangular e tem origem no fato de que, na geometria elementar, cada lado de um triângulo tem medida menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

Exemplo 1.0.2. [Métrica usual da reta] Verifique que $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, definida por $d(x, y) = |x - y|$ é uma métrica.

De fato,sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$;
D_1) $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$;

D_2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$. Com efeito,

$$x \neq y \Longrightarrow |x - y| > 0$$

Portanto, $d(x, y) = |x - y| > 0$.

D_3) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in \mathbb{R}$. De fato,

$$|x-y| = |y-x|; \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Logo, $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$;

D_4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Usando a desigualdade triangular, teremos

$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z| = d(x,y)+d(y,z)$,

o que resulta, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Definição 1.0.3 (Espaço Métrico)**.** *Um espaço métrico é um par (M,d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M.*

Se considerarmos espaços métricos distintos (M,d) e (N,d), as métricas são diferentes. Por isso, nos utilizaremos das notações (M,d_M) e (N,d_N), para designar que a métrica d_M é do espaço métrico (M,d) e que a métrica d_N é do espaço métrico (N,d). Além disso, por comodidade, quando não houver perigo de confusão em relação à métrica envolvida, escreveremos apenas M em vez de (M,d_M) para denotar um espaço métrico.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, entre outros. Por comodidade, chamaremos os elementos de pontos de M.

Exemplo 1.0.4. [Métrica "zero-um"] Qualquer conjunto M não vazio pode tornar-se um espaço métrico se munido da métrica $d : M \times M \to [0,+\infty)$ definida por $d(x,x) = 0$ e $d(x,y) = 1$, se $x \neq y$, $\forall x, y \in M$.

A noção de bola e esfera é muito importante para o estudo dos espaços métricos. Vejamos a definição a seguir:

Definição 1.0.5 (Bola aberta, bola fechada e esfera)**.** *Sejam a um ponto no espaço métrico M e $r > 0$ um número real, define-se:*

i) A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior a r:

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

ii) A bola fechada (ou disco) de centro a e raio r é o conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior ou igual a r:

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

iii) A esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a;r)$ formado pelos pontos de M cuja distância ao ponto a é igual a r:

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Os nomes “bola aberta”, “bola fechada”e “esfera”são, por natureza, motivados por espaços de dimensão maior do que um, mas na reta $\mathbb{R}$ teremos intervalos representando bolas e pontos representando a esfera.

Por exemplo, na reta $\mathbb{R}$ a bola aberta $B(a;r)$ é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$, a bola fechada de centro a e raio r é o intervalo fechado $B[a;r] = [a-r, a+r]$ e a esfera de centro a e raio r se reduz ao par de pontos $S(a;r) = \{a-r, a+r\}$.

Definição 1.0.6 (Conjuntos limitados)**.** *Seja A um subconjunto não-vazio de um espaço métrico (M, d_M). Se existe uma constante $k > 0$ tal que $d_M(x,y) \leq k$ para todo $x, y \in A$, então dizemos que o conjunto A é limitado.*

Exemplo 1.0.7. Toda bola $B(a;r)$, num espaço métrico, é um conjunto limitado. De fato, dados $x, y \in B(a;r)$, temos $d(x,a) < r$ e $d(y,a) < r$. Pela desigualdade triangular $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < r + r = 2r$. De forma análoga, toda bola fechada $B[a;r]$ de um espaço métrico é limitada. Da desigualdade triangular $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq r + r = 2r$.

1.1 Topologia do Espaço Métrico

Definição 1.1.1 (Ponto interior)**.** *Seja X um subconjunto não-vazio de um espaço métrico M. Um ponto $a \in X$ é ponto interior a X, quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset X$. O conjunto de todos os pontos interiores a X é chamado de interior de X. Denotaremos por $int(X)$ o interior de um conjunto X.*

Definição 1.1.2 (Conjunto Aberto)**.** *Seja (M, d_M) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ diz-se aberto em M, quando todos os seus pontos são pontos interiores a A, isto é, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p;\varepsilon) \subset A$.*

Exemplo 1.1.3. Bolas abertas são conjuntos abertos.

De fato, seja $r > 0$ e $x \in B(a;r)$ uma bola aberta de centro a e raio r. Pela definição de bola aberta, $d(a,x) < r$ e, portanto, o número $s = r - d_M(a,x)$ é positivo.

Devemos verificar que $B(x;s) \subset B(a;r)$.

Com efeito, se $y \in B(x;s)$, então $d_M(x,y) < s$ e, portanto, usando D_4 temos que $d_M(a,y) \leq d_M(a,x) + d_M(x,y) < d_M(a,x) + s = r - s + s = r$. Portanto, $d_M(a,y) < r$ e, consequentemente, $y \in B(a;r)$.

Definição 1.1.4 (Vizinhança)**.** *Num espaço métrico M, diz-se que o conjunto V é uma vizinhança de um ponto $x \in M$ quando $x \in int(V)$, isto é, V contém uma bola aberta que contém x.*

Definição 1.1.5 (Ponto aderente)**.** *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto a diz-se ponto aderente ao conjunto X quando, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se*

$$B(a;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes a X chama-se fecho de X e é indicado por $\overline{X}$.

Definição 1.1.6 (Conjunto fechado)**.** *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ é fechado quando seu complementar $F^c = M - F$ é aberto em M.*

Definição 1.1.7 (Função Contínua)**.** *Sejam $(M,d_M),(N,d_N)$ espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_M(x,a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x),f(a)) < \varepsilon.$$

Diz-se que $f : M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Proposição 1.1.8. *Sejam (M,d_M),(N,d_N) espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(U)$ de qualquer conjunto aberto U de (N,d_N) é um conjunto aberto de (M,d_M).*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que $U \subset N$ seja aberto. Fixando $a \in f^{-1}(U)$, temos $f(a) \in U$. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $y \in N$ e $d_N(y,f(a)) < \varepsilon$, então $y \in U$. Como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in M$ e $d_M(x,a) < \delta$, então $d_N(f(x),f(a) < \varepsilon$. Portanto, se $x \in M$ e $d_M(x,a) < \delta$, então $f(x) \in U$, ou seja, $B(a;\delta) \subset f^{-1}(U)$.
($\Longleftarrow$) Por outro lado, seja $a \in M$ arbitrário. Devemos mostrar que f é contínua no ponto

a. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, a bola $U = B(f(a);\varepsilon)$ é um aberto em N, contendo $f(a)$. Por hipótese $f^{-1}(U)$ é um aberto, que contém a. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subset f^{-1}(U)$. Isto significa que se $x \in M$ e $d_M(x,a) < \delta$ implica $f(x) \in U$, isto é, $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$, ou seja, f é contínua em a. □

Corolário 1.1.9. *Sejam (M, d_M),(N, d_N) espaços métricos. Se uma função $f : M \to N$ é contínua e $F \subset (N, d_N)$ é um conjunto fechado, então a imagem inversa $f^{-1}(F)$ é fechado em (M, d_M).*

Demonstração. Sejam $f : M \to N$ contínua e $F \subset N$ fechado. Assim, o complementar de F (que denotaremos por F^c) é aberto em N. Pela Proposição anterior, $f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c$ é aberto em M. Portanto, $f^{-1}(F)$ é fechado em M. □

Observação. A continuidade pontual é um evento local, isto é, depende apenas do comportamento da f numa vizinhança do ponto. No entanto, temos um tipo de continuidade que apresenta uma relação de continuidade para todo o espaço (não ficando restrita ao ponto), como segue:

Definição 1.1.10 (Função Uniformemente Contínua)**.** *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ é uniformemente contínua se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon, \qquad \forall x, y \in M.$$

1.2 Sequências

Definição 1.2.1 (Sequência)**.** *Uma sequência num conjunto M é uma função $x : \mathbb{N} \to M$ definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$. O valor que a sequência x assume no número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, chamado n-ésimo termo da sequência.*

Usaremos as notações $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n) para representar uma sequência.

Exemplo 1.2.2. Se definirmos $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pondo $x_n = (-1)^n$, então obtemos a sequência $(-1, 1, -1, 1, ...)$, cujo conjunto de valores é $\{-1, 1\}$.

Definição 1.2.3 (Subsequência)**.** *Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da função $x : \mathbb{N} \to M$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$. A subsequência é indicada pelas notações $(x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk}, ...)$, $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ ou (x_{nk}), onde $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...$ e $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, ...\}$.*

Definição 1.2.4 (Sequência limitada)**.** *Uma sequência* (x_n) *num espaço métrico* (M, d_M) *chama-se limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe* $k > 0$ *tal que* $d_M(x_m, x_n) \leq k$*, para todo* $m, n \in \mathbb{N}$.

Quando uma sequência (x_n) *não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.*

Exemplo 1.2.5. Sejam $\mathbb{R}$, com a métrica usual da reta, e a sequência (x_n) definida por $x_n = \dfrac{1}{n}$. A sequência (x_n) é limitada, pois, usando a desigualdade triangular para os números reais (APÊNDICE A), segue que $\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right| \leq \left|\dfrac{1}{n}\right| + \left|\dfrac{1}{m}\right| \leq 2$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.2.6. Sejam $M = \mathbb{R}$ e a sequência (x_n) definida por $x_n = (-1)^n$.

Como $d(x_n, x_m) = 0$ ou $d(x_n, x_m) = 2$, segue que (x_n) é uma sequência limitada.

Definição 1.2.7 (Sequência convergente)**.** *Seja* (x_n) *uma sequência num espaço métrico* (M, d_M)*. Diz-se que o ponto* $a \in M$ *é limite de* (x_n) *quando, para todo número* $\varepsilon > 0$ *arbitrário, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow d_M(x_n, a) < \varepsilon.$$

Escreve-se então $\lim x_n = a$ *ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$*. Se diz, também, que* x_n *tende para* a *e indica-se por:* $x_n \to a$.

Proposição 1.2.8. *Sejam* (M, d_M),(N, d_N) *espaços métricos. Se* $f : M \to N$ *contínua e existe uma sequência* (x_n) *tal que* $x_n \to a \in M$*, então* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Demonstração. Seja f contínua no ponto $a \in (M, d_M)$ e $x_n \to a$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_o \Rightarrow d_M(x_n, a) < \delta_\varepsilon$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow d_N(f(x_n) - f(a)) < \varepsilon$. Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$. □

Definição 1.2.9 (Convergência Simples)**.** *Seja* M *um espaço métrico. Diz-se que uma sequência de funções* $f_n : X \to M$ *converge simplesmente para uma função* $f : X \to M$ *quando, para todo* $x \in X$*, a sequência* $(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...)$ *tem limite* $f(x)$ *em* M.

Observação. Na convergência simples (também chamada de convergência pontual) o $n_0 \in \mathbb{N}$ que satisfaz $n > n_0 \Rightarrow d_M(f_n(x) - f(x)) < \epsilon$, depende de x e de ϵ.

Definição 1.2.10 (Convergência Uniforme)**.** *Uma sequência de funções* $f_n : X \to M$ *converge uniformemente para a função* $f : X \to M$ *quando, para todo número* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow d_M(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$*, para todo* $x \in X$.

Se f_n for uma sequência de funções constante, então f_n converge uniformemente para essa constante. E se $f_n \to f$ e $g_n \to g$, ambas convergindo uniformemente, então verifica-se facilmente que $f_n \pm g_n \to f \pm g$ também convergem uniformemente.

Observação. Diferente da convergência simples, na convergência uniforme existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que depende apenas do ε dado, mas não depende de $x \in X$.

Proposição 1.2.11. *Sejam $(M, d_M), (N, d_N)$ espaços métricos. Se uma sequência de funções $f_n : M \to N$, contínuas no ponto $a \in M$, converge uniformemente em M para uma função $f : M \to N$, então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Como f_n converge uniformemente, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow d_N(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3,\ \forall x \in M$. Como f_{n_0} é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $d_M(x, a) < \delta$ implica $d_N(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) < \varepsilon/3$. Então, para todo $x \in M$ com $d_M(x, a) < \delta$, temos:

$$d_N(f(x), f(a)) \leqslant d_N(f(x), f_{n_0}(x)) + d_N(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + d_N(f_{n_0}(a), f(a)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto f é contínua no ponto a. □

1.3 Espaços Métricos Compactos

Definição 1.3.1 (Cobertura). *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma cobertura de X é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M, com $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para cada $x \in X$ existe um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.*

Observações:

- Quando cada subconjunto C_λ, $\lambda \in L$, for aberto, diz-se que $\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta.
- Se $L = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ for um conjunto finito, diz-se que $\mathcal{C}$ é uma cobertura finita.

Definição 1.3.2 (Subcobertura). *Sejam M um espaço métrico e $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ um cobertura de $X \subset M$. Se existe $L' \subset L$ com $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, isto é, para cada $x \in X$ existe um índice $\lambda \in L'$ tal que $x \in C_\lambda$, então a subfamília $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}'}$ é uma subcobertura de $\mathcal{C}$.*

Definição 1.3.3 (Conjunto compacto). *Um conjunto K num espaço métrico M é dito compacto quando toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.*

Definição 1.3.4 (Espaço Métrico Compacto). *Um espaço métrico M chama-se compacto, quando toda cobertura aberta de M possui uma subcobertura finita.*

Em outras palavras, se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos abertos em M tal que $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então existem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in L$ tais que $M = A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_n}$.

A noção de espaço compacto pode também ser formulada em termos de conjuntos fechados.

Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos abertos em M tal que $M = A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_n}$, os complementares $F_\lambda = M - A_\lambda$ formam uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos fechados de M. Tem-se $M = \cup A_\lambda \Leftrightarrow \cap F_\lambda = \emptyset$.

Portanto, um espaço métrico M é compacto se, e somente se, toda família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados com interseção vazia, $\bigcap_{\lambda \in L} (F_\lambda) = \emptyset$, possui uma subfamília finita com interseção vazia: $F_{\lambda_1} \cap F_{\lambda_2} \cap ... \cap F_{\lambda_n} = \emptyset$.

Proposição 1.3.5. *Se uma sequência de funções reais contínuas $f_n : M \to \mathbb{R}$, definidas num espaço métrico compacto M, converge simplesmente para uma função contínua $f : M \to \mathbb{R}$ e, além disso, tem-se $f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_n(x) \leq ...$ para todo $x \in M$, então a convergência $f_n \to f$ é uniforme em M.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$F_n = \{x \in M; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Como $f_n \to f$ e $f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_n(x) \leq ...$, segue que $f(x) \geq f_n(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, $|f_n(x) - f(x)| = f - f_n$ e, consequentemente, forma-se uma sequência decrescente $F_1 \supseteq F_2 \supseteq ... \supseteq F_n \supseteq ...$ em que cada F_n é fechado em M (pelo Corolário 1.1.9), uma vez que F_n é a imagem inversa da função contínua $g_n(x) := f_n(x) - f(x)$ no intervalo fechado $[\varepsilon, +\infty)$.

Devemos provar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $x \in M$, isto é, $F_{n_0} = \emptyset$.

Por hipótese temos que $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$, isto é, para todo $x \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Assim, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Como M é compacto, devemos ter $F_n = \emptyset$ para algum n, já que a sequência (F_n) é decrescente e uma interseção finita deve ser $\emptyset$. $\square$

Proposição 1.3.6. *Todo espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração. Se K é vazio então K é limitado. Caso contrário, tome $a \in K$. Então $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(a;n)$. Como K é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita

$$K \subset B(a;n_1) \cup \cdots \cup B(a;n_k).$$

Tomando $m := \max\{n_1, \cdots, n_k\}$ temos

$$K \subset B(a;m).$$

Logo, dados $x, y \in K$, temos

$$d_M(x,y) \leq d_M(x,a) + d_M(a,y) \leq m + m = 2m.$$

Portanto, K é limitado. □

Proposição 1.3.7. *Sejam M e N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função contínua. Se M é compacto então $f(M)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma cobertura por abertos de $f(M)$. Sendo f contínua, pela Proposição 1.1.8, cada $f^{-1}(A_\lambda)$ é aberto e tal que $M \subset \bigcup_{\lambda\in L} f^{-1}(A_\lambda)$. Como M é compacto, existem índices $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tais que $M \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup ... \cup f^{-1}(A_{\lambda_m})$. Logo,

$$f(M) \subset f(f^{-1}(A_{\lambda_1})) \cup ... \cup f(f^{-1}(A_{\lambda_m})) \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_m}.$$

Portanto, $f(M)$ é compacto. □

Definição 1.3.8. *Seja M um espaço métrico compacto. O par $(\mathcal{C}(M;\mathbb{R}), d_\mathcal{C})$ é um espaço métrico, onde $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ representa o conjunto de todas as funções contínuas de M em $\mathbb{R}$ e $d_\mathcal{C}(f,g) = sup_{x\in M}|f(x) - g(x)|$ é a **"métrica da convergência uniforme"**, que está bem definida pelas Proposições 1.3.6 e 1.3.7. Analogamente, define-se $(\mathcal{C}(M;\mathbb{C}), d_\mathcal{C})$.*

Por comodidade, utilizaremos apenas das notações $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}(M;\mathbb{C})$ para representar os espaços métricos $(\mathcal{C}(M;\mathbb{R}), d_\mathcal{C})$ e $(\mathcal{C}(M;\mathbb{C}), d_\mathcal{C})$, respectivamente.

Pela Definição 1.3.8, se (f_n) é uma sequência que converge para f em $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$, então (f_n) converge uniformemente para f.

Proposição 1.3.9. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto, então toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Suponha que f não seja uniformemente contínua. Assim, existe $\varepsilon > 0$ e sequências (x_n), $(y_n) \in X$ tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \tag{1.1}$$

e

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Como X é compacto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass[1], podemos supor (passando para subsequências, se necessário) que (x_n) e (y_n) convergem para elementos de X. Seja $a \in X$ o limite de (x_n). Afirmamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$. De fato, de (1.1) temos $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$, logo

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}[x_n + (y_n - x_n)] = a + 0 = a.$$

Da continuidade de f no ponto a e da Proposição 1.2.8, então

$$\lim_{n\to+\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) - \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(a) - f(a) = 0,$$

em contradição com (1.2). □

As definições e resultados, aqui expostos, são importantes para que o leitor se familiarize com alguns termos que se farão presentes nos Lemas e Teoremas que serão expostos e demonstrados nos próximos capítulos, bem como, será necessário citar o resultado de algumas proposições, que darão suporte teórico às referidas demonstrações.

[1]Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. (LIMA, 2009a)

2 O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Neste capítulo estudaremos o teorema de Aproximação de Weierstrass, sobre aproximação de funções contínuas em intervalos fechados e limitados da reta, seguindo as referências (LIMA, 2015), (RUDIN, 1976) e (LIMA, 2009a).

2.1 Teorema de Aproximação de Weierstrass (1ª demonstração)

Teorema 2.1.1. *Dada uma função contínua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *existe uma sequência de polinômios* p_n *tais que* $\lim_{n\to+\infty} p_n = f$ *uniformemente em* $[a, b]$.

Demonstração. Primeiro vamos considerar o caso em que $[a, b] = [0, 1]$ e $f(0) = f(1) = 0$. Como [0,1] é um intervalo compacto e f é contínua, pela proposição 1.3.9, segue que f é uniformemente contínua em [0,1]. Por outro lado, estendendo f em toda a reta $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ se $x \notin [0, 1]$, teremos f uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Para maiores detalhes (APÊNDICE B).

Para cada n $\in \mathbb{N}$, seja

$$c_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n dt$$

e $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções definida por $\varphi_n(t) = 0$ se $|t| \geq 1$ e, para todo $t \in [-1, 1]$,

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{c_n}(1 - t^2)^n.$$

Assim,

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(t)dt = {c_n}^{-1} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n dt = c_n^{-1} \cdot c_n = 1.$$

Precisamos de alguma informação sobre a ordem de grandeza de c_n. Sendo

$$
\begin{aligned}
c_n &= \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt = 2\int_{0}^{1}(1+t)^n(1-t)^n dt \\
&\geq 2\int_{0}^{1}(1-t)^n dt = -2\left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2}{n+1},
\end{aligned}
$$

resulta que $c_n \geq \dfrac{2}{n+1}$ e, consequentemente, $c_n^{-1} \leq \dfrac{n+1}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que para $0 < \delta \leq |t| \leq 1$, teremos $\varphi_n(t) \leq \dfrac{n+1}{2}(1-\delta^2)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, como $\delta > 0$, então

$$
\begin{aligned}
& \delta \leq |t| \leq 1 \\
\Leftrightarrow\; & \delta^2 \leq t^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow\; & 0 \leq 1-t^2 \leq 1-\delta^2 \\
\Leftrightarrow\; & 0 \leq (1-t^2)^n \leq (1-\delta^2)^n,
\end{aligned}
$$

donde segue que $\varphi_n(t) = c_n^{-1}(1-t^2)^n \leq \dfrac{n+1}{2}(1-t^2)^n \leq \dfrac{n+1}{2}(1-\delta^2)^n$.

Considerando que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(1-\delta^2)^n$ é absolutamente convergente (pelo Teste da Razão [1]) (APÊNDICE C), segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)$ é uniformemente convergente (pelo Teste de Weierstrass[2]). Logo o termo geral $(\varphi_n(t))$ da série uniformemente convergente é tal que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t) = 0$, para $0 < \delta \leq |t| \leq 1$, como mostra a figura a seguir:

[1]Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$. Então a série é absolutamente convergente. (LIMA, 2009a)

[2]Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série de funções em X tais que $|f_n(x)| < a_n$, para todo $x \in X$, e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente. Então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é uniformemente convergente. (LIMA, 2009a)

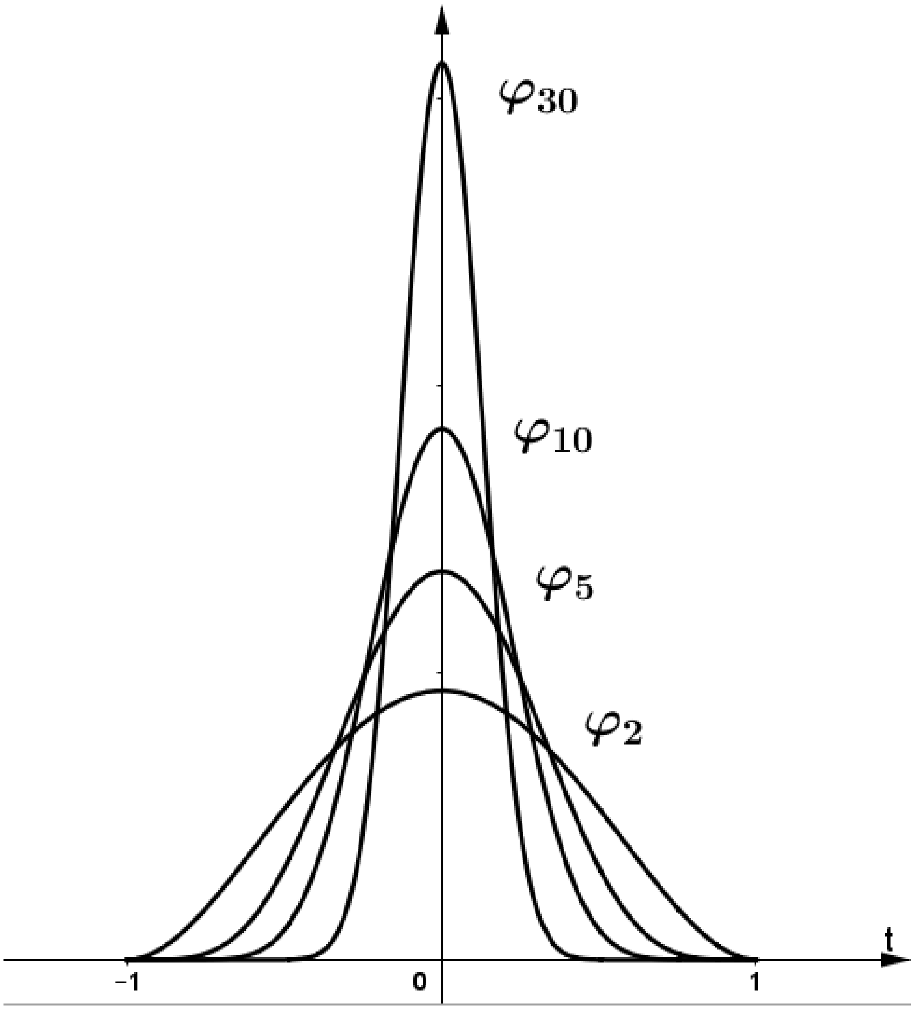

Figura 1: Gráfico das φ_n.

Observemos que $\varphi_n \to 0$ uniformemente em $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$, uma vez que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}; n > n_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_n(t)| < \varepsilon;\ \forall t \in [-1, -\delta] \cup [\delta, 1].$$

Ou seja, $\varphi_n \to 0$ uniformemente em $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $p_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t)\varphi_n(t)dt.$$

A mudança de variável $y = x + t$, para $0 \leq x \leq 1$, nos dá:

$$p_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(y)\varphi_n(y - x)dy = \int_0^1 f(y)\varphi_n(y - x)dy.$$

A segunda igualdade vale porque, para todo $x, y \in [0, 1]$, tem-se $[x + 1, x - 1] \supset [0, 1]$

e $y - x \in [-1, 1]$, então

$$\int_{x-1}^{x+1} f(y)\varphi_n(y-x)dy = \int_{x-1}^{0} f(y)\varphi_n(y-x)dy + \int_{0}^{1} f(y)\varphi_n(y-x)dy + \int_{1}^{x+1} f(y)\varphi_n(y-x)dy$$

onde

$$\int_{x-1}^{0} f(y)\varphi_n(y-x)dy \;=\; 0 \;=\; \int_{1}^{x+1} f(y)\varphi_n(y-x)dy,$$

uma vez que $f(x) = 0$ para $x \notin [0, 1]$.

Denotemos por $\xi_i(y)$, para cada $i = 0, 1, 2, ..., 2n$, os coeficientes (que estão em função de y) das potências de x da sequência de funções $c_n^{-1}[1 - (y - x)^2]^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim podemos escrever,

$$\varphi_n(y - x) = c_n^{-1}[1 - (y - x)^2]^n = \sum_{i=0}^{2n} \xi_i(y)x^i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p_n(x) = \int_0^1 f(y)\varphi_n(y-x)dy &= \int_0^1 f(y)\sum_{i=0}^{2n} \xi_i(y)x^i dy \\ &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{2n} f(y)\xi_i(y)x^i dy \\ &= \sum_{i=0}^{2n} \Big[\int_0^1 f(y)\xi_i(y)dy \Big] \cdot x^i \end{aligned}$$

é uma sequência de polinômios na variável x. Portanto, p_n são polinômios.

Como $\int_{-1}^{1} \varphi_n(t)dt = 1$, temos

$$f(x) = f(x)\int_{-1}^{1} \varphi_n(t)dt = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(t)dt.$$

Assim, para $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) - p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(t)dt - \int_{-1}^{1} f(x+t)\varphi_n(t)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(t) - f(x+t)\varphi_n(t)dt = \int_{-1}^{1} [f(x) - f(x+t)]\varphi_n(t)dt$$

Como f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x+t)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, para $x \in [0, 1]$. Seja $M = sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$.

Como $\varphi_n \to 0$ uniformemente para $|t| \geq \delta$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, $|t| \geq \delta \Rightarrow |\varphi(t)| < \dfrac{\varepsilon}{6M}$. Logo, para todo $n > n_0$ e todo $x \in [0,1]$, temos

$$|f(x)-p_n(x)| = \Big|\int_{-1}^{1}[f(x)-f(x+t)]\varphi_n(t)dt\Big| \leq \int_{-1}^{1}\big|f(x)-f(x+t)\big|\varphi_n(t)dt = A+B+C,$$

isto é, $|f(x) - p_n(x)| \leq A + B + C$, onde

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{-\delta}\big|f(x) - f(x+t)\big|\varphi_n(t)dt \leq 2M\int_{-1}^{-\delta}\varphi_n(t)dt < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3}, \\ B &= \int_{-\delta}^{\delta}\big|f(x) - f(x+t)\big|\varphi_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{3}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

e

$$C = \int_{\delta}^{1}\big|f(x) - f(x+t)\big|\varphi_n(t)dt \leq 2M\int_{\delta}^{1}\varphi_n(t)dt < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, $|f(x) - p_n(x)| \leq A + B + C < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, isto é, $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$ e $x \in [0,1]$, ficando, assim, provado o primeiro caso.

Por outro lado, se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua arbitrária que não satisfaz à condição $f(0) = f(1) = 0$, podemos considerar a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(t) - f(0) - t[f(1) - f(0)].$$

Observemos que, dado f contínua, g também é contínua e é tal que $g(0) = g(1) = 0$, como segue:

$$g(0) = f(0) - f(0) - 0[f(1) - f(0)] = 0 = f(1) - f(0) - [f(1) - f(0)] = g(1).$$

Pelo que foi demonstrado anteriormente, g pode ser aproximada por polinômios. Assim, seja (p_n) uma sequência de polinômios tal que $p_n \to g$ uniformemente em [0,1] e tome $q(t) = f(0) - t[f(1) - f(0)]$. Logo,

$$p_n(t) + q(t) \to g(t) + q(t) = f(t)$$

de onde f é limite uniforme da sequência de polinômios $p_n + q$, em [0,1].

Por fim, sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo compacto arbitrário [a,b] e $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(s) = f(a+s(b-a))$. Considere $u(s) = a+s(b-a)$. Pelo que já vimos anteriormente, existe uma sequência de polinômios (q_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = h = f \circ u$ uniformemente em [0,1].

Dado $s \in [a,b]$, temos

$$u(s) = (b-a)s + a \Rightarrow u(s)^{-1} = \frac{s-a}{b-a},$$

onde $\frac{s-a}{b-a} \in [0,1]$.

Defina $p_n := q_n \circ u^{-1}$, ou seja, $p_n(s) = q_n\left(\frac{s-a}{b-a}\right)$.

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(t) \circ u^{-1} = h \circ u^{-1} = f\left(a + \frac{s-a}{b-a}(b-a)\right) = f(s)$ uniformemente em $[a,b]$, ficando, assim, demonstrado o Teorema de Aproximação de Weierstrass. $\square$

2.2 Teorema de Aproximação de Weierstrass (2^a demonstração)

Uma demonstração alternativa para o Teorema de Aproximação de Weierstrass foi apresentada pelo matemático francês Henri Léon Lebesgue, em 1897, baseada na aproximação de funções contínuas por funções poligonais, observando que essas podem ser uniformemente aproximadas por polinômios. Vamos apresentar uma exposição das considerações envolvidas em tal demonstração seguindo a referência (LIMA, 2015).

Lema 2.2.1. *Existe uma sequência de polinômios p_n tais que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(t) = \sqrt{t}$ uniformemente para $t \in [0,1]$.*

Demonstração. Fixe $p_0 = 0$ e considere definidos os polinômios $p_0, p_1, p_2, ..., p_n$ de tal forma que

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}[t - p_n(t)^2], \quad \forall n > 0. \tag{2.1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_1(t) = p_{0+1}(t) &= p_0(t) + \frac{1}{2}[t - p_0(t)^2] \\ &= 0 + \frac{1}{2}[t - 0^2] \\ &= \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(t) = p_{1+1}(t) &= p_1(t) + \frac{1}{2}[t - p_1(t)^2] \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}[t - (\frac{1}{2}t)^2] \\ &= t - \frac{1}{8}t^2, \end{aligned}$$

isto é, o polinômio seguinte é, de forma indutiva, dado pelo anterior.

Primeiro, vamos provar por indução que $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0,1]$.

Observe que para $n = 1$ a desigualdade é válida, pois $p_1(t) = \dfrac{1}{2}t \leq \sqrt{t}$ para todo $t \in [0,1]$.

Suponha que vale para $n \in \mathbb{N}$, isto é, $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ para todo $t \in [0,1]$.

Fixemos $t \in [0,1]$. Para mostrar que vale para $n+1$, teremos que trabalhar com a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + (1/2)(t - x^2)$.

Como $f(0) = t/2$, $f(\sqrt{t}) = \sqrt{t}$ e $f'(x) = 1 - x \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$, segue que f é uma bijeção crescente de $[0, \sqrt{t}]$ sobre $[t/2, \sqrt{t}]$. Em particular, $0 \leq x \leq \sqrt{t} \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{t}$. Como $p_{n+1}(t) = f(p_n(t))$ e, por hipótese de indução, $p_n(t) \leq \sqrt{t} \Rightarrow f(p_n(t)) = p_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$ para todo $t \in [0,1]$. Logo a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0,1]$.

Por outro lado, como $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ temos $p_n(t)^2 \leq t$, donde $t - p_n(t)^2 \geq 0$. Logo $p_{n+1}(t) \geq p_n(t)$, já que $p_{n+1}(t) = p_n(t) + \dfrac{1}{2}[t - p_n(t)^2]$. Portanto, $p_n(t) \leq p_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$, para todo $t \in [0,1]$.

Existe, pois, $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(t)$. Fazendo $n \to \infty$ na relação (2.1), obtemos:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(t) + [t - \varphi(t)^2]/2 \\ \varphi(t) - \varphi(t) &= t/2 - \varphi(t)^2/2 \\ \varphi(t)^2 &= t \\ \varphi(t) &= \sqrt{t}. \end{aligned}$$

A uniformidade da convergência resulta da proposição 1.3.5. □

Lema 2.2.2. *Em qualquer intervalo compacto $[a,b]$, a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o intervalo dado é da forma $[-c,c]$, com $c > 0$, pois dado $[a,b]$, com $a,b \in \mathbb{R}$, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $[-c,c] \supset [a,b]$.

Fixe $c = 1$ e suponha que exista uma sequência de polinômios (p_n) tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(t) = |t|$ uniformemente para $t \in [-1,1]$. Isto é,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N};\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |p_n(t) - |t|| < \varepsilon,\ \forall t \in [-1,1]. \tag{2.2}$$

A sequência de polinômios $q_n(t) = c \cdot p_n(t/c)$, com essa definição, converge uniformemente para $|t|$ em $[-c,c]$, isto é, $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n(t) = c\cdot\dfrac{|t|}{c} = |t|$ uniformemente para $t \in [-c,c]$. De fato,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_{\frac{\varepsilon}{c}}\in\mathbb{N};\ n>n_{\frac{\varepsilon}{c}} \Rightarrow \Big||t|-q_n(t)\Big| = \Big|c\cdot\frac{|t|}{c}-c\cdot p_n(t/c)\Big| = |c|\cdot\Big|\frac{|t|}{|c|}-p_n(t/c)\Big| < c\cdot\frac{\varepsilon}{c}=\varepsilon,$$

$\forall \dfrac{t}{c}\in[-1,1] \Leftrightarrow \forall t\in[-c,c]$.

$\left[\textbf{Obs.}\ \text{basta fixar } \varepsilon \text{ em (2.2) e tomar } n_{\frac{\varepsilon}{c}}\in\mathbb{N} \text{ tal que } n>n_{\frac{\varepsilon}{c}} \Rightarrow |p_n(t)-|t|| < \dfrac{\varepsilon}{c}.\right]$

Pelo Lema 2.2.1, existe uma sequência de polinômios (p_n) que converge uniformemente para $\sqrt{t}$ em $[0,1]$, isto é,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N};\ n>n_\varepsilon \Rightarrow \left|p_n(t)-\sqrt{t}\right|\le\varepsilon;\quad \forall t\in[0,1]. \tag{2.3}$$

Então, $q_n(t) = p_n(t^2)$ define uma sequência de polinômios que converge uniformemente para $\sqrt{t^2} = |t|$ quando $t\in[-1,1]$. De fato, para o mesmo $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ considerado em (2.3), temos:

$$n>n_\varepsilon \Rightarrow \Big|q_n(t)-|t|\Big| = \left|p_n(t^2)-\sqrt{t^2}\right| < \varepsilon,\quad \forall t\in[-1,1]$$

uma vez que $t\in[-1,1]\Leftrightarrow t^2\in[0,1]$. □

Vamos a algumas definições que serão necessárias para os Lemas posteriores:

Definição 2.2.3 (Função linear)**.** *Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ chama-se linear quando é da forma $f(x)=\alpha x+\beta$, onde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ são constantes.*

Definição 2.2.4 (Função poligonal)**.** *Uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ chama-se poligonal quando existe uma partição $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ do seu domínio tal que, para cada $i=1,2,3,...,n$, f é linear em $[x_{i-1},x_i]$. Cada x_i da subdivisão de $[a,b]$ determina os vértices $(x_i,f(x_i))$ da linha poligonal que constitui o gráfico de f.*

Exemplo 2.2.5. A função $f(x)=|x|$ num intervalo contendo zero é uma função poligonal não-linear.

Outro tipo de função poligonal não-linear é a chamada rampa. Trata-se de uma função contínua $f_i:[a,b]\to\mathbb{R}$ com $a\le x_{i-1}<x_i\le b$, tal que f é zero no intervalo $[a,x_{i-1}]$, linear em $[x_{i-1},x_i]$ e constante em $[x_i,b]$. O gráfico de uma rampa tem a forma esboçada na figura a seguir.

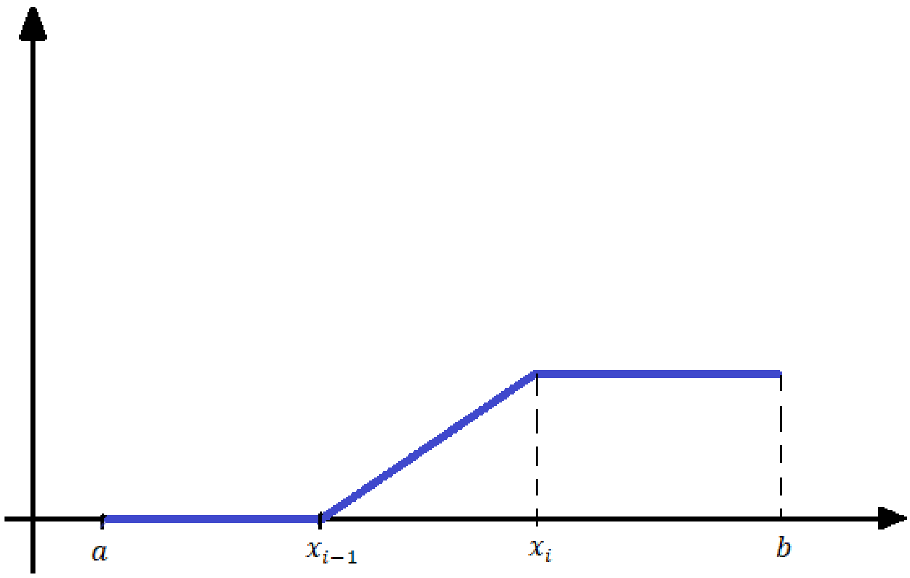

Figura 2: Rampa

Se $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma rampa tal que $f_i(x) = \alpha_i(x - x_{i-1})$ para $x \in [x_{i-1}, x_i]$, então, para $x \in [a, b]$,

$$f_i(x) = \alpha_i(min\{x, x_i\} - min\{x, x_{i-1}\})$$

onde

$$min\{x, x_i\} = \frac{x + x_i - |x - x_i|}{2} \quad \text{e} \quad min\{x, x_{i-1}\} = \frac{x + x_{i-1} - |x - x_{i-1}|}{2}$$

isto é,

$$f_i(x) = \frac{\alpha_i}{2}(x_i - x_{i-1} + |x - x_{i-1}| - |x - x_i|). \tag{2.4}$$

Portanto, toda poligonal $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se exprime como soma de constantes $f(a)$ mais um número finito de rampas. Daí resulta o Lema a seguir:

Lema 2.2.6. *Toda função poligonal $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios.*

Demonstração. Como a expressão (2.4) descreve uma rampa em $[a, b]$ e toda poligonal é constituída de constantes mais rampas, Pelo Lema 2.2.2, segue que toda rampa é limite uniforme de polinômios e, consequentemente, toda poligonal $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limite uniforme de polinômios. $\square$

O teorema de Aproximação de Weierstrass decorre do Lema anterior, juntamente com o seguinte.

Lema 2.2.7. *Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções poligonais.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade uniforme de f assegura a existência de uma partição $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ tal que se x, y pertencem ao mesmo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição, então $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função cujo gráfico é a poligonal com vértices nos pontos $(x_i, f(x_i))$. Em outras palavras, $g(x_i) = f(x_i)$ e g é linear em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| = |g(x) - f(x_i) + f(x_i) - f(x)| &\leq |g(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &\leq |f(x_{i-1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon$; para todo $x \in [a, b]$.

Observe que:
A primeira desigualdade $|g(x) - f(x_i) + f(x_i) - f(x)| \leq |g(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)|$ se dá pela desigualdade triangular para números reais. (APÊNDICE A)

A segunda desigualdade $|g(x) - f(x_i)| \leq |f(x_{i-1}) - f(x_i)|$, resulta de $g(x)$ pertencer ao intervalo cujo extremos são $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. $\square$

A segunda demonstração do teorema de Aproximação de Weierstrass, proposta por Henri Léon Lebesgue, é mais acessível para o leitor em relação à primeira demonstração exposta, uma vez que se trabalha com conceitos mais elementares. No entanto, ela não mostra a sequência de polinômios que converge para a função continua definida no intervalo compacto da reta, diferindo da primeira.

No próximo capítulo, demonstraremos o Teorema de Stone-Weierstras para funções contínuas reais e para funções contínuas complexas. Se trata de uma generalização do teorema de Aproximação de Weierstrass, proposta e demonstrada pelo matemático americano Marshall Harvey Stone, em 1937, onde o intervalo compacto é substituído por espaços métricos compactos. Para isso, utilizaremos na demonstração de um dos Lemas para o Teorema de Stone-Weierstrass o Teorema de Aproximação de Weierstrass, justificando a importância de se fazer esse trabalho para entrar no capítulo seguinte.

3 O Teorema de Stone-Weiestrass

Neste capítulo enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Stone-Weierstrass para os casos real e complexo. Para tanto, vamos tratar de alguns resultado e definições que serão utilizados.Para esse estudo, utilizamos as referências (ALVES, 2016), (LIMA, 2015) e (TASCA, 2013).

3.1 Teorema de Stone-Weierstrass (Versão Real)

Definição 3.1.1. *Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$. Diremos que A é uma* ***álgebra*** *de funções reais contínuas, ou uma* ***subálgebra*** *de $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$, quando:*
i) $f+g \in A$;
ii) $f \cdot g \in A$;
iii) $\alpha \cdot f \in A$.
para quaisquer que sejam $f, g \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.2. O conjunto das funções constantes de M em $\mathbb{R}$ constitui uma álgebra de funções reais contínuas.

Observação. Pela Proposição 1.2.11, uma sequência (f_n) em A convergir uniformemente para f é equivalente a $f \in \overline{A}$, onde o fecho é tomado no espaço métrico $(\mathcal{C}(M;\mathbb{R}), d_{\mathcal{C}})$.

Lema 3.1.3. *Sejam M um espaço métrico compacto e $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ uma álgebra de funções reais contínuas que contém as funções constantes. Se $f \in A$, então $|f| \in \overline{A}$.*

Demonstração. Dada $f \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$, como M é compacto, a Proposição 1.3.7 garante a existência de um intervalo $[a,b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $f(M) \subset [a,b]$.

Considere a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$.

Como a função módulo é contínua, tem-se que $g \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$. Assim, pelo Lema 2.2.2, existe uma sequência de polinômios q_n tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) = g(x)$ uniformemente em $[a,b]$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow |q_n(x) - g(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in M$.

Usando o fato de que $f(M) \subset [a,b]$, temos $|q_n(f(x)) - g(f(x))| = |(q_n \circ f)(x) - |f(x)|| < \varepsilon$, $\forall x \in M$.

Notemos que $(q_n \circ f) \in A$. Com efeito, como $q_n(x)$ é uma sequência de polinômios, então para cada $i \in \{1, ..., n\}$ é da forma:

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i.$$

Fazendo a composição de q_n com f,para cada $i \in \{1, ..., n\}$, resulta que:

$$(q_n \circ f)(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i (f(x))^i = a_m [f(x)]^m + a_{m-1}[f(x)]^{m-1} + ... + a_1 f(x) + a_0$$

Por hipótese, $f \in A$, e como A é uma álgebra que contém as constantes, segue que $f(x)^m, f(x)^{m-1}, ..., f(x), a_0 \in A$. Logo $(q_n \circ f) \in A$ e, consequentemente, $|f| \in \overline{A}$. □

Observação. Como consequência do lema anterior, se $f, g \in A$ então $|f - g| \in \overline{A}$, uma vez que $f - g \in A$.

Definição 3.1.4. *Dadas $f, g : M \to \mathbb{R}$, $f \vee g$ e $f \wedge g$ são as funções de M em $\mathbb{R}$ definidas por:*

$$(f \vee g)(x) = max\{f(x), g(x)\} \quad e \quad (f \wedge g)(x) = min\{f(x), g(x)\}.$$

Observação. Vale a associatividade para $(f \vee g) \vee h = f \vee (g \vee h)$ e $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$. Assim, os símbolos $f_1 \vee f_2 \vee ... \vee f_n$ e $f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n$ são definidos sem ambiguidade.

Lema 3.1.5. *Seja $A \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ uma álgebra e M um espaço métrico compacto. Se $f, g \in A$, então $f \vee g$ e $f \wedge g$ pertencem a $\overline{A}$.*

Demonstração. Basta notar que,

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \text{e} \quad f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Pelo Lema 3.1.3, segue o resultado. □

Definição 3.1.6. *Diz-se que um conjunto $B \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ separa os pontos de M quando, dados $x, y \in M$, com $x \neq y$, existe $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Exemplo 3.1.7. Conjunto A dos polinômios com coeficientes reais é uma álgebra de funções contínuas que separa pontos em M e possui as funções constantes.

Lema 3.1.8. *Seja $A \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ uma álgebra que separa pontos e contém as funções constantes. Fixando $h \in \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ e dados arbitrariamente $x \neq y$ em M, existe $f \in A$ tal que $f(x) = h(x)$ e $f(y) = h(y)$.*

Demonstração. Dados $x, y \in M$, com $x \neq y$, como A separa pontos, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Definido $f = s \cdot g + t$, onde

$$s = \frac{h(x) - h(y)}{g(x) - g(y)}$$

e

$$t = \frac{h(y)g(x) - h(x)g(y)}{g(x) - g(y)}$$

segue que

$$\begin{aligned} f(x) = s \cdot g(x) + t &= \frac{h(x) - h(y)}{g(x) - g(y)} \cdot g(x) + \frac{h(y)g(x) - h(x)g(y)}{g(x) - g(y)} \\ &= \frac{h(x)g(x) - h(y)g(x) + h(y)g(x) - h(x)g(y)}{g(x) - g(y)} \\ &= \frac{h(x)g(x) - h(x)g(y)}{g(x) - g(y)} \\ &= \frac{h(x)[g(x) - g(y)]}{g(x) - g(y)} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(y) = s \cdot g(y) + t &= \frac{h(x) - h(y)}{g(x) - g(y)} \cdot g(y) + \frac{h(y)g(x) - h(x)g(y)}{g(x) - g(y)} \\ &= \frac{h(x)g(y) - h(y)g(y) + h(y)g(x) - h(x)g(y)}{g(x) - g(y)} \\ &= \frac{h(y)g(x) - h(y)g(y)}{g(x) - g(y)} \\ &= \frac{h(y)[g(x) - g(y)]}{g(x) - g(y)} \\ &= h(y). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.9. ***(Teorema de Stone-Weierstrass caso Real)*** *Sejam M um espaço métrico compacto e $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ uma álgebra de funções contínuas que contém as constantes e separa pontos. Então $\overline{A} = \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$, isto é, toda função contínua $f : M \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções pertencentes a A.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ e fixando $f \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$, vamos construir uma aplicação $g_\varepsilon \in \overline{A}$ tal que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \epsilon$, para todo $x \in M$. E isto demonstrará o teorema.

Para $x, y \in M$ arbitrários,(pelo Lema 3.1.8) existe $g_{xy} \in A$ tal que $g_{xy}(x) = f(x)$ e $g_{xy}(y) = f(y)$. Caso tenhamos $x = y$, basta pegar a $g_{xy} \in A$ constante.

Fixemos $\varepsilon > 0$ e $x \in M$. Usando o fato de que $g_{xy}(y) = f(y)$ e da continuidade da g_{xy} em M, para cada $y \in M$, existe uma vizinhança de y (que denotaremos por V_y) tal que se $z \in V_y$, segue que $g_{xy}(z) - f(z) < \varepsilon$ e, consequentemente, $g_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon$.

Como M é uma espaço métrico compacto, existem $y_1, y_2, y_3, ..., y_n \in M$ tal que $\bigcup_{i=0}^{n} V_{y_i}$ é uma cobertura de M, isto é, $M = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup V_{y_3} \cup ... \cup V_{y_n}$. Além disso, defina

$$g_x := g_{xy_1} \wedge g_{xy_2} \wedge g_{xy_3} \wedge ... \wedge g_{xy_n}.$$

Pelo Lema 3.1.5, segue que $g_x \in \overline{A}$. Além disso, para todo $z \in M$, existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $z \in V_{y_i}$. Então $g_x(z) \leq g_{xy_i}(z) < f(z) + \varepsilon$. Logo,

$$g_x(z) < f(z) + \varepsilon, \qquad \forall z \in M. \tag{3.1}$$

Seguindo o raciocínio utilizado anteriormente, o fato de que $g_x(x) = f(x)$ e pela continuidade da g_x em M, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança de x (que denotaremos por U_x), tal que se $z \in U_x$ segue que $f(z) - g_x(z) < \varepsilon$ e, consequentemente, $f(z) - \varepsilon < g_x(z)$.

Por outro lado, como M é uma espaço métrico compacto, existem $x_1, x_2, x_3, ..., x_m \in M$ tal que $M = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup U_{x_3} \cup ... \cup U_{x_m}$. Definido,

$$g_\varepsilon := g_{x_1} \vee g_{x_2} \vee g_{x_3} \vee ... \vee g_{x_m},$$

segue pelo Lema 3.1.5, que $g_\varepsilon \in \overline{A}$. Além disso, para todo $z \in M$, existe $j \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que $z \in U_{x_j}$. Então $f(z) - \varepsilon < g_{x_j}(z) \leq g_\varepsilon(z)$. Logo,

$$f(z) - \varepsilon \leq g_\varepsilon(z), \qquad \forall z \in M. \tag{3.2}$$

Por outro lado, notemos que para todo $i \in 0, 1, 2, ..., m$ e todo $z \in M$ tem-se $g_{x_i}(z) < f(z) + \varepsilon$. Portanto, pela definição da g_ε e por (3.1), tem-se que

$$g_\varepsilon(z) < f(z) + \varepsilon, \qquad \forall z \in M. \tag{3.3}$$

Por (3.2) e (3.3), segue que

$$f(z) - \varepsilon < g_\varepsilon(z) < f(z) + \varepsilon, \qquad \forall z \in M,$$

isto é, $|f(z) - g_\varepsilon(z)| < \varepsilon$, para todo $z \in M$, o que conclui a demonstração. $\square$

3.2 Teorema de Stone-Weierstrass (Versão Complexa)

Nesta seção, enunciaremos e demonstraremos o teorema de Stone-Weierstrass para funções contínuas complexas. Para tanto, vejamos algumas definições que serão utilizadas:

Vamos considerar funções contínuas complexas $f : M \to \mathbb{C}$, definidas por $f(x) = u(x) + i \cdot v(x)$, onde $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in M$. Como f é contínua, isso define as funções contínuas $u, v : M \to \mathbb{R}$, chamadas, respectivamente, a *parte real* e a *parte imaginária* da f. Assim, denotaremos por $u = Re(f)$ e $v = Im(f)$.

Definição 3.2.1. *Dada $f : M \to \mathbb{C}$, denotaremos por $\overline{f} : M \to \mathbb{C}$, definida por $\overline{f(x)} = u(x) - i \cdot v(x)$, o conjugado da função $f(x) = u(x) + i \cdot v(x)$, para todo $x \in M$.*

Observação. Denotemos por $Re(A)$ e $Im(A)$ o conjunto formado pela parte real e pela parte imaginária de toda $f \in A$, respectivamente, isto é,

$$Re(A) = \{Re(f); f \in A\} \ \text{ e } \ Im(A) = \{Im(f); f \in A\}.$$

Definição 3.2.2. *Diremos que uma álgebra $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{C})$ é **auto-adjunta** quando para toda $f \in A$, $\overline{f}$ também pertence a A.*

Exemplo 3.2.3. O conjunto dos polinômios com coeficientes complexos é uma álgebra auto-adjunta.

Lema 3.2.4. *Sejam M um espaço métrico compacto, $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{C})$ uma subálgebra auto-adjunta que contém as funções constantes e $f : M \to \mathbb{C}$ uma função complexa contínua, então $Re(A)$ e $Im(A)$ são álgebras de funções reais contínuas que contém as constantes.*

Demonstração. Com efeito, dado $f = u + i \cdot v \ \in A$, segue que $\overline{f} = u - i \cdot v \ \in A$, pois A é auto adjunta. Assim,

$$Re(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} = \frac{u + i \cdot v + u - i \cdot v}{2} = \frac{2u}{2} = u \ \in A, \tag{3.4}$$

onde $u : M \to \mathbb{R}$ é contínua. E,

$$Im(f) = \frac{f - \overline{f}}{2} = \frac{u + i \cdot v - [u - i \cdot v]}{2} = \frac{2iv}{2} = i \cdot v \ \in A, \tag{3.5}$$

onde $v : M \to \mathbb{R}$ é contínua.

Dados $u_1, u_2 \in Re(A)$ arbitrários, por (3.4),(3.5) e pela definição de álgebra segue que

$$\begin{aligned}
u_1 + u_2 \in Re(A) &\Rightarrow \exists\ f_1, f_2 \in A \text{ tal que } Re(f_1) = u_1 \text{ e } Re(f_2) = u_2 \\
&\Rightarrow u_1, u_2 \in A \\
&\Rightarrow u_1 + u_2, u_1 \cdot u_2, \alpha u_1 \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow u_1 + u_2 = Re(u_1 + u_2), u_1 \cdot u_2 = Re(u_1 \cdot u_2), \alpha u_1 = Re(\alpha u_1) \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow u_1 + u_2, u_1 \cdot u_2, \alpha u_1 \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Logo, $Re(A)$ é uma álgebra de funções reais contínuas que contém as constantes.

De forma análoga, segue o resultado para $Im(A)$. □

Teorema 3.2.5. ***(Teorema de Stone-Weierstrass Versão Complexa)*** *Sejam M um espaço métrico compacto e $\mathcal{C}(M;\mathbb{C})$ o conjunto das funções contínuas de M em $\mathbb{C}$.*

Se $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{C})$ tem as seguintes propriedades:
i) A é uma subálgebra auto-adjunta de $\mathcal{C}(M;\mathbb{C})$;
ii) as funções constantes estão contidas em A;
iii) A separa pontos de M, isto é, $x, y \in M$, com $x \neq y$, então existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$.
Então toda função contínua complexa $f : M \to \mathbb{C}$ pode ser uniformemente aproximada por funções pertencentes a A.

Demonstração. Seja A um subconjunto de $\mathcal{C}(M;\mathbb{C})$ com as propriedades acima.

Pelo Lema 3.2.4, temos que $Re(A) \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ e $Im(A) \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ formam álgebras de funções reais contínuas que contém as constantes.

Mostraremos, agora, que $Re(A)$ separa pontos em M.

Com efeito, dados $x \neq y \in M$, como A separa pontos, existe $f = u + i \cdot v \ \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Logo, $u(x) \neq u(y)$ ou $v(x) \neq v(y)$. Se ocorrer o primeiro caso, como $u \in Re(A)$, vemos que $Re(A)$ separa pontos de M. Caso, tenhamos $v(x) \neq v(y)$, devemos observar que v é a parte real da função $g = -i \cdot f = -i(u + i \cdot v) = v - i \cdot u \ \in A$, isto é, v pertence $Re(A)$. Então, seja qual for o caso, $Re(A)$ separa pontos de M.

Usando o mesmo raciocínio, veremos que $Im(A)$ também separa pontos de M. De fato, se $v(x) \neq v(y)$, então $Im(A)$ separa pontos de M, uma vez que $v \in Im(A)$. Por outro lado, se $u(x) \neq u(y)$, devemos observar que u é a parte imaginária da função $g \in A$, definida anteriormente. Logo, independente do caso, $Im(A)$ separa pontos de M. Portanto, temos que $Re(A)$ e $Im(A)$ são subálgebras de $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ que contém as constantes e separa pontos. Podemos, então, aplicar o Teorema de Stone-Weierstrass (real) e concluir que $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ pode ser uniformemente aproximada por funções pertencentes a $Re(A)$ e pertencentes a $Im(A)$.

Assim, dada qualquer função complexa contínua $h = u + i \cdot v \ \in \mathcal{C}(M;\mathbb{C})$, existem sequências $u_n \in Re(A) \subset A$ e $v_n \in Im(A) \subset A$ tais que $u_n \to u$ e $v_n \to v$ uniformemente em M. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n = u_n + i \cdot v_n \ \in A$ tal que $f_n = u_n + i \cdot v_n \to u + i \cdot v = h$ uniformemente em M. $\square$

Conclusão

O teorema de Aproximação Weierstrass e o Teorema de Stone-Weierstrass são de grande importância para a teoria da análise matemática por permitir aproximar funções contínuas quaisquer, em conjuntos compactos, por sequência de polinômios, que possuem um comportamento mais regular.

Fazendo uma comparação entre as demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass, apresentadas no segundo capítulo, é possível perceber que a demonstração apresentada pelo matemático alemão Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, em 1885, nos permite construir a sequência de polinômios que possui a propriedade de convergir para a função contínua dada, o que não se verifica na demonstração do teorema de Aproximação apresentada pelo matemático francês Henri Léon Lebesgue, em 1897, baseada na aproximação de funções contínuas por funções poligonais, que fica num campo mais teórico.

Ao reconhecer que o intervalo compacto $[a, b]$ poderia ser substituído por espaços mais gerais, o matemático Marshall Harvey Stone percebeu que a questão central era identificar as funções que fariam o papel dos polinômios neste contexto mais abstrato. Nesse sentido, foi natural buscar funções que, de certa forma, produzem o comportamento dos polinômios, com suas propriedades, dentre as quais destacam-se que a soma e o produto de polinômios é um polinômio e o produto de um polinômio por um escalar é um polinômio. Isso nos levou à noção de álgebra de funções contínuas.

No desenvolvimento do trabalho, vários tópicos da matemática que aparecem não são vistos nos cursos de graduação mas, por outro lado, utilizamos várias ferramentas do cálculo e da análise real. Nesse sentido, o estudo de tal assunto, por demandar o estudo de conceitos mais elaborados e abstratos, foi muito importante para um amadurecimento pessoal.

Referências

ALVES, J. E. P. Teoremas de aproximações e aplicação. *Universidade Estadual da Paraíba*, p. 50, 2016. Trabalho de Conclusão de Curso.

LIMA, E. L. *Análise Real*. Rio de Janeiro: Instituto Nacinal de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacinal de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

RIBENBOIM, P. *Funções, Limites e Continuidade*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RUDIN, W. *Principle of Mathematical Analysis*. 3. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1976.

TASCA, F. A. Teorema de stone-weierstrass para espaços localmente compactos. *Universidade Federal de Santa Catarina*, p. 60, 2013. Trabalho de Conclusão de Curso.

APÊNDICE A – Desigualdade Triangular

Proposição (Desigualdade Triangular). *Se* $x, y \in \mathbb{R}$ *então* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Se $x, y \geq 0$ então $x + y \geq 0$. Logo, $|x + y| = x + y = |x| + |y|$.

Se $x, y < 0$ então $x + y < 0$. Logo, $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|$.

Se $x < 0 \leq y$, teremos que $x + y \geq 0$ ou $x + y < 0$. Portanto,

$$|x + y| = x + y \quad ou \quad |x + y| = -(x + y).$$

Como $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue que

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y| \quad \text{ou} \quad |x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Logo, seja qual for o caso, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

APÊNDICE B – Convergência Uniforme

Se f é uniformemente contínua em $[0,1]$ e a extensão de f em toda a reta $\mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 0$ se $x \notin [0,1]$, então f uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Como f é uniformemente contínua em $[0,1]$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $a, b \in [0,1]$ tais que $|a-b| < \delta$ tem-se $|f(a) - f(b)| < \epsilon$.

Se $a < 1 < b$ temos que $f(b) = f(1)$. Então, para todo $a, b, \in D_f$ tais que $|a-b| < \delta$ temos $|a-1| < |a-b|$, logo $|f(a) - f(b)| = |f(a) - f(1)| < \epsilon$.

Se $a < 0 < b$ temos que $f(a) = f(0)$. Então, para todo $a, b, \in D_f$ tais que $|a-b| < \delta$ temos $|a-0| < |a-b|$, logo $|f(a) - f(b)| = |f(0) - f(b)| < \epsilon$.

O caso $a < 0$ e $1 < b$ pode ser desconsiderado já que é sempre possível tomar $\delta < |a-b|$.

Logo, f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

APÊNDICE C – Convergência da Série

Seja $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(1-\delta^2)^n$ para $0 < \delta < 1$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $a_n = (n+1)(1-\delta^2)^n$ é uma sequência de termos não nulos tal que,

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|(n+1+1)(1-\delta^2)^{n+1}|}{|(n+1)(1-\delta^2)^n|} \\ &= \frac{\left(\frac{n}{n}+\frac{2}{n}\right)(1-\delta^2)^{n+1}}{\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)(1-\delta^2)^n}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)(1-\delta^2)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)(1-\delta^2)^n}\cdot(1-\delta^2).$$

Como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}(1-\delta^2) < 1 \qquad \forall\ 0 < \delta \leq 1 \ e \ n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pelo Teste da Razão, $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(1-\delta^2)^n$ converge.

Se $\delta = 1$, segue que $a_n = (n+1)(1-\delta^2)^n = (n+1)(1-1^2)^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(1-\delta^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ e, portanto, converge.