UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JADER SCHMIDT KRAUSE

NOÇÕES SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA E SUAS APLICAÇÕES NA DINÂMICA DE POPULAÇÕES

SÃO MATEUS

2018

JADER SCHMIDT KRAUSE

NOÇÕES SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA E SUAS APLICAÇÕES NA DINÂMICA DE POPULAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso do curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário Norte do Espírito Santo da Universidade Federal do Espírito Santo apresentado ao colegiado do curso de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sc. Aldo Vignatti

SÃO MATEUS

2018

AGRADECIMENTOS

A caminhada acadêmica para chegar até aqui não foi uma tarefa fácil e para todas as etapas dessa trajetória o apoio de algumas pessoas foi essencial. Assim sendo, gostaria de dedicar toda a minha gratidão a tais pessoas.

Agradeço primeiramente a Deus pela proteção, saúde e pelos sucessos adquiridos em cada dia.

Aos meus pais pelo apoio em todos os momentos, pelo incentivo de continuar em meio às dificuldades e por todo o carinho e atenção dedicados. Agradeço também a toda minha família, em especial a minha irmã e seu marido, que estiveram mais próximos a mim em grande parte do tempo de graduação.

A minha namorada por todo o carinho e paciência, suportando minha ausência em alguns momentos e relevando meu estresse advindo das preocupações com os deveres universitários.

A todos os meus professores da graduação, em especial a Andressa Cesana, Arildo Castelluber, Michel Guimarães, Moysés Siqueira e Wescley Bonomo, por todo o aprendizado adquirido nessa trajetória.

Ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e aos professores de matemática da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Wallace Castello Dutra (Josiane Baldo, Flávio Pereira e Deise Souza) pelas oportunidades de aprendizado por meio de observações e práticas docentes.

Aos meus colegas e amigos por todo apoio e colaboração em cada dia na universidade, em particular agradeço a Fabrício Zampirollo e Júlia Bravim que estiveram sempre comigo em grande parte desses momentos compartilhando tristezas e alegrias, além de alguns outros como: Brendon de Jesus, Wesley Lourenço, Thiago de Souza, Elizeu Fernndes, Lucas Amaral, Felipe Oliveira, Bruno Chelles, Vitor Silva, Jhonathan Andrade, Ester Félix, Joana Moraes, entre outros que se fizeram presentes nesses momentos.

Ao meu orientador Aldo Vignatti pelas orientações e por todo o auxílio para a realização desse trabalho final.

Quem fica esperando que o vento mude e que o tempo fique bom nunca plantará, nem colherá nada.

Eclesiastes 11. 4

RESUMO

Apoiando-nos, principalmente, em pressupostos teóricos como Almeida, Silva e Vertuan (2012), Bassanezi (2010), Biembengut e Hein (2010) e Diniz (2011) procuramos dissertar sobre as concepções que se tem sobre modelagem matemática e modelo matemático ressaltando, em seguida, os benefícios de sua utilização como metodologia para o ensino de matemática. Posteriormente, seguindo o foco principal do nosso trabalho, discorremos sobre a aplicação da modelagem matemática em dinâmicas populacionais, definindo equações de diferenças lineares, variações contínuas e variações discretas como conceitos auxiliares ao estudo e apresentamos alguns modelos clássicos da literatura utilizados para representar a dinâmica de populacões isoladas. Feito isso, procuramos reescrever modelos de populações escritos por Bassanezi (2010) e Diniz (2011), realizando algumas modificações para a adequação ao nosso trabalho. Por meio disso, procuramos mostrar a importância da modelagem matemática para a simplificação e melhor entendimento de estudos realizados, principalmente em dinâmica de populações, bem como sua utilidade para a resolução de problemas afins, preservação e acompanhamento de espécies e aplicabilidade no ensino de matemática.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Modelo matemático. Dinâmica populacional. Equações de diferenças.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na maioria das vezes, no ambiente educacional, a matemática é tratada de forma muito isolada recaindo em uma série exaustiva e mecânica de exercícios rotineiros, perdendo assim o seu verdadeiro "encanto". Esse distanciamento da realidade vivenciada pelos discentes dificulta o processo de aprendizagem e promove certo estranhamento frente às demais disciplinas, pois se restringe a poucas situações contextualizadas.

Durante minha vivência no ambiente escolar, por meio das disciplinas de estágio ou do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), presenciei diversas situações em que os alunos não demonstravam interesse por determinado assunto, simplesmente, pelo fato de achar que eles não lhes seriam úteis futuramente, pois não pensavam em ingressar em nenhum curso que fosse diretamente ligado à matemática. Devido à inquietação gerada por essas observações, sempre manifestei interesse em estudar aplicações matemáticas em outras disciplinas, mas até então não havia tido tal oportunidade.

A partir da disciplina Pesquisa e Prática Pedagógica e pela necessidade de realizar uma pesquisa para a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, resolvi buscar a orientação do professor Aldo Vignatti que, dentre outras propostas, apresentou-me o livro "Equações de diferenças e sistemas com aplicações biológicas"do autor Geraldo Lúcio Diniz e propôs que estudássemos tal assunto. Após a leitura do livro decidi que era o que eu realmente queria estudar e que por meio de tal estudo seríamos capazes de escrever um trabalho objetivando um melhor aprendizado sobre modelagem matemática e suas aplicações na dinâmica de algumas populações.

Em um curso de Licenciatura em Matemática é importante que se aprenda a matemática da forma pura como geralmente é ensinada, mas, ao mesmo tempo, é essencial mostrar a existência de aplicações práticas do conteúdo estudado e ressaltar a importância de tais aplicações em situações-problema presentes no cotidiano dos alunos ou ao menos próximas disso, pois tais atitudes são importantes no processo de ensino-aprendizagem, ao qual seremos inseridos posteriormente, na medida em que atuam, principalmente, como uma questão motivacional ao estudo da matemática.

> A Matemática Aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática. É esse elo com as ciências que distingue o matemático aplicado do matemático puro. A diferença consiste, essencialmente, na atitude de se pensar e fazer matemática (BASSANEZI, 2010, p. 32).

Nessa perspectiva, procuramos discorrer no presente trabalho a respeito de algumas noções sobre a modelagem matemática e suas aplicações na *dinâmica de populações*, mostrando que a matemática pode ser aplicada, contextualizada e desenvolvida de forma reflexiva sobre seu uso, auxiliando no desenvolvimento cognitivo de quem a aplica, rompendo algumas barreiras psicológicas criadas ao longo do tempo à respeito da matemática.

De acordo com Cunha et al (2017), é usual definir uma *população* como sendo um grupo de indivíduos de uma determinada espécie de seres vivos. Essas populações podem ser compostas por bactérias, vírus, plantas ou animais. Já em relação à *dinâmica*, segundo conceitos físicos, trata-se do estudo da relação entre as forças que atuam sobre corpos e a variação do movimento que tais forças provocam nestes corpos. Seguindo esse raciocínio, denominaremos aqui *dinâmica populacional* como o estudo da variação no tempo da quantidade total ou da densidade de uma determinada população, quando submetida a uma ação interna ou externa à população. Sendo que tais ações podem ocorrer no sentido de aumentar ou diminuir o tamanho da população em questão.

Para facilitar e melhorar os estudos, as populações analisadas neste trabalho foram tratadas matematicamente como populações isoladas e com interações bem definidas de acordo com hipóteses iniciais estipuladas. É importante ressaltar que as aproximações utilizadas não afastam os resultados da realidade, pois algumas populações se desenvolvem de forma isolada e outras podem ser isoladas por meio de barreiras artificiais criadas, (CUNHA et al, 2017), impostas por um pesquisador.

Na realização do presente trabalho visamos como objetivo geral: despertar o interesse de alunos da graduação ou profissionais já atuantes na educação básica sobre a importância da modelagem tanto para pesquisas quanto para aplicações em sala de aula. Além disso, objetivamos de maneira mais específica que esse trabalho seja útil para: ampliar conhecimentos a respeito desse assunto tão atual que vem ganhando cada vez mais prestígio dentre os estudiosos; desenvolver a matemática de quem desenvolve e de quem lê e, ainda, desenvolver o pensamento crítico em relação ao uso da matemática.

Na primeira parte do trabalho (Capítulo 2), descrevemos, por meio de referenciais teóricos, o que se entende sobre modelagem matemática e modelo matemático, mostrando ainda a importância de sua aplicação no ensino, uma vez que nós, como professores ou futuros professores, devemos sempre buscar métodos objetivando melhorias no ensino, que muitas vezes se encontra enraizado em uma "forma de aprender", que nem sempre funciona.

Na segunda parte do trabalho (composta pelos Capítulos 3 e 4), abordamos a modelagem matemática na aplicação biológica, mostrando sobre o que tal área trata. Para isso, inicialmente, definimos alguns conceitos relevantes ao estudo e descrevemos alguns modelos clássicos que tratam do assunto para que tivéssemos uma base para, posteriormente, desenvolver alguns modelos que descrevem o comportamento de algumas populações levando em consideração algumas variáveis necessárias a sua adequação à realidade. Nessa parte do texto são necessários o uso de alguns conceitos básicos de Álgebra Linear e Cálculo I que o leitor não sentirá dificuldade em relembrar ou de aprender, caso seja necessário para um melhor entendimento.

Esperamos assim, que o texto sirva de motivação para que o leitor, seja ele da área educacional ou da área de pesquisas matemáticas, obtenha informações sobre o assunto para auxiliá-lo de alguma forma, pois de acordo com Bassanezi (2010), a modelagem matemática como instrumento de pesquisa pode ser considerada relevante por diversos pontos como:

- Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
- Pode sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
- Pode servir como recurso para melhorar o entendimento da realidade;
- Pode servir de linguagem universal para a compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento.

Conclui-se então que a modelagem matemática é uma ferramenta útil tanto para a realização de pesquisas científicas como para o ensino, partindo do fato de que ela pode ser aplicada em diversas áreas do conhecimento como a Física, Química e a Biologia cujas aplicações mostraremos adiante por meio de modelos que descrevem o comportamento dinâmico de algumas populações.

2 CONCEPÇÕES SOBRE MODELO MATEMÁTICO E MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo discorremos sobre algumas concepções de modelo matemático e modelagem matemática de acordo com a visão de alguns renomados autores da área, abordando a importância de sua aplicação no ensino e aprendizagem.

2.1 Modelo matemático

Apesar de muitas vezes não nos darmos conta, a utilização de modelos matemáticos se faz muito presente em nosso cotidiano. Existem diversos modelos criados para a solução de problemas relativamente simples, que nos são ensinados durante a educação básica, como: cálculos de áreas e perímetros de figuras geométricas, o tempo gasto até que um objeto em queda livre toque o chão, a quantidade média de combustível gasto pelo automóvel em função da distância, o montante resultante de um investimento realizado a uma determinada taxa de juros, entre outros.

> Seja qual for o caso, a resolução de um problema, em geral quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se "modelo matemático"(BIEMBENGUT; HEIN, 2010, p. 12).

Diferente do que alguns são levados a pensar, modelos matemáticos podem ser utilizados em diversas áreas do conhecimento, além da matemática, à medida que se depara com um problema e busca-se descrever, prever, ilustrar, expor ou explicá-lo de forma matemática. Nesse sentido, um modelo matemático buscar simplificar a interpretação da situação, facilitar o entendimento de todos e, principalmente, conseguir respostas para o problema em questão.

> Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

Na maioria das vezes, a elaboração de um modelo matemático não é uma tarefa muito fácil e depende do conhecimento matemático que se tem e da complexidade dos cálculos envolvidos. Existem modelos matemáticos criados há séculos e que são muito úteis na atualidade, como a fórmula resolutiva de equações polinomiais do segundo grau. Por outro lado, existem modelos que foram criados, mas se tornaram ultrapassados e alguns que simplesmente não foram possíveis de serem desenvolvidos apesar de muitas tentativas.

Acredita-se que o modelo de universo do astrônomo grego Claúdio Ptolomeu, conhecido como geocentrismo, descrito por Diniz (2011), tenha sido um dos primeiros modelos de grande repercussão ao qual pressupunha que a terra era imóvel e que o sol se deslocava em círculos em torno dela, dando origem aos dias e noites. Como na época, (90-170 d.C.), ninguém conseguiu rebater tal modelo, ele ficou sendo aceito durante cerca de 14 séculos até que o astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) formulou e apresentou a teoria do heliocentrismo a qual vigora até os dias atuais. Por outro lado, modelos para resoluções de equações polinomiais quaisquer de grau maior do que ou igual a três ainda não foram possíveis de serem formulados devido à complexidade envolvida.

Independente da validação ou não dos modelos, constantemente o ser humano se desafia procurando avançar em seus estudos através da busca por soluções de problemas e, muitas vezes, para isso, utiliza-se de conjuntos de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado, o que de acordo com Bassanezi (2010), denomina-se modelo matemático.

2.2 Modelagem matemática

A construção de um modelo não acontece de forma imediata, demandando um processo de construção que pode levar certo tempo por necessitar de informações precisas sobre o objeto estudado, afim de que o modelo seja útil e atenda as necessidades esperadas para a adequação à realidade. Assim, de acordo com Biembengut e Hein (2010), todo esse processo realizado para a obtenção de um modelo, denomina-se modelagem matemática.

Como especificado por Bassanezi (2010), a ciência se encontra em constante desenvolvimento, possibilitando avanços importantes para agir corretamente em determinadas ações presentes ou futuras. Esses avanços nos diversos estudos gerou a necessidade de uma linguagem simbólica que se associa de forma sucinta a certas representações orais ou visuais de comunicações, dando origem à linguagem e a representação gráfica, utilizada pelos diversos ramos da ciência para auxiliar nas análises dos resultados de pesquisas empíricas. Assim, por meio da linguagem matemática, a visão simples que se tinha do objeto estudado deu espaço à uma visão crítica e mais abrangente, facilitando o raciocínio e o pensamento com uma forte e formalizada economia de linguagem.

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validade de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2010, p. 24).

Entretanto, apesar de ser útil em muitos casos, a modelagem matemática não se aplica de forma eficaz a qualquer situação real, pois o excesso da utilização de uma simbologia matemática pode dificultar o entendimento quando o objetivo do uso era o esclarecimento, ou seja, antes de se utilizar da modelagem matemática deve-se verificar se seu uso realmente contribui para a análise e compreensão do fenômeno em questão, pois, como ressaltado por Almeida, Silva e Vertuan (2012), a modelagem matemática visa sempre propor soluções para algum problema por meio de um modelo matemático, entendida como a "atividade"de busca pela solução do problema.

Como já mencionado anteriormente, o processo de modelagem matemática não se restringe apenas à formulação do modelo, pois para elabora-lo é preciso passar por algumas etapas necessárias à sua estruturação, configuração e obtenção. Diferentes autores se aventuram na estruturação dessas etapas de construção. Aqui, entretanto, nos apoiamos principalmente na estruturação elaborada por Almeida, Silva e Vertuan (2012), com ideias auxiliares de Bassanezi (2010) e Biembengut e Hein (2010), denotando as fases de procedimentos para se realizar um processo de modelagem matemática como: *inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.*

Inteiração

Como a própria palavra nos remete, o primeiro passo é inteirar-se, buscar informações sobre o assunto do problema em questão, obter um primeiro contato com a situação-problema e começar a buscar um "arsenal" teórico ou prático que ajude com ideias e metas para uma melhor condução até a solução. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), os focos principais dessa fase são a escolha de um tema e a busca de informações a respeito dele.

Matematização

Após identificar a situação-problema, o próximo passo é adaptá-lo de sua linguagem natural para uma linguagem matemática, buscando evidenciar o problema a ser resolvido. Nesse processo realiza-se uma transição de linguagens onde ocorre a definição de variáveis, formulação de hipóteses iniciais (verificadas geralmente de forma empírica), simplificações em relação às informações e ao problema, uma vez que alguns fenômenos estudados se tornam extremamente complexos à medida que se incluem detalhes, e busca por técnicas e procedimentos matemáticos que os descrevam simplificando a visualização e interpretação do problema que se deseja resolver sem que se afaste da realidade representada.

De acordo com Bassanezi (2010), é comum que um modelo matemático dê origem a um problema complexo e com possibilidades mínimas de solução e é neste momento que deve ocorrer a simplificação ou restrição de algumas informações incorporadas ao modelo, mas de maneira que isso não desfigure o problema original, mantendo-o como um problema matemático tratável que apresentará uma solução condizente com a realidade.

Resolução

Como o problema já foi matematizado, o próximo passo é resolver matematicamente o modelo que descreve a situação e dar alguma resposta à pergunta inicial tomada como objeto de estudo, bem como para as perguntas que surgem no decorrer do processo por meio de uma matemática coerente.

Interpretação de resultados e validação

Nessa fase, ocorre a aceitação ou não do modelo formulado. Os resultados obtidos pelo modelo devem ser interpretados em confronto com os dados empíricos para verificar se há concordância ou não nos resultados.

Bassanezi (2010) ressalta que o grau de aproximação desejado para as previsões do problema serão importantes para definir se o modelo construído é válido, prevendo no mínimo os fatos que o originaram. Caso isso não ocorra, ou o modelo seja insuficiente para responder as perguntas desejadas, ele deve ser modificado ou substituído por um novo modelo que atenda as demandas necessárias de um bom modelo, capaz de prever novos fatos ou saciar dúvidas das quais se tinha alguma suspeita, pois uma modelagem eficaz leva a previsões e facilita a tomada de decisões e explicações acerca do fenômeno estudado, ou seja, um modelo eficiente é capaz de se adequar ao mundo real e influenciar em suas mudanças.

> De qualquer forma, um bom modelo matemático é aquele que o usuário, especialista na área onde se executou a modelagem, o considerado como tal, tendo as qualidades de ser suficientemente simples e representar razoavelmente a situação analisada (BASSANEZI, 2010, p. 30).

Entretanto, é importante ressaltar que a qualidade de um modelo pode ser relativa, dependendo do contexto em que o modelo é desenvolvido e do olhar de quem o analisa. Um modelo de dinâmica populacional, por exemplo, pode ser tido como bom para um matemático e como inviável para um biólogo. Assim sendo, é importante que haja um intercâmbio entre os pesquisadores a fim de gerar um modelo coerente e útil.

2.3 Modelagem Matemática no ensino

Atualmente, segundo Oliveira (2013), o ensino de matemática tem sido repensado, buscando mais dinamicidade e menos mecanização. Porém, ainda é preciso desenvolver-se para se adequar aos novos tempos, necessitando superar algumas ideologias criadas como, por exemplo, o mito da matemática elitista, o qual prega que a matemática seja apenas compreendida por “gênios”, ou alunos de alto coeficiente.

Considera-se que mesmo com essa preocupação em tornar o ensino de matemática significativo ainda há certo distanciamento da realidade vivenciada pelos discentes, dificultando o processo de aprendizagem, bem como, promovendo estranhamento frente às demais disciplinas, pois se restringe à poucas situações contextualizadas, e por isso, muitas vezes, recai ao isolamento quando é usualmente ensinada apenas com teorias rígidas, definições e exercícios repetitivos.

Na atualidade é preciso considerar que cada estudante vai desenvolver suas atividades em meio a uma sociedade informatizada, com globalização de informações, em que a destreza no uso de seus conhecimentos é requisito fundamental para uma participação ativa e crítica e, para que isso seja possível, é importante uma intervenção na prática docente. Nesse sentido, o professor tem o papel de incentivar os alunos na busca pela aprendizagem utilizando-se de artifícios que cativem o aluno ao gosto pelo assunto, pois a monotonia dos exercícios e fórmulas fazem com que o aluno adquira certo desinteresse pelo conteúdo abordado, gerando assim, uma "má impressão" da matemática, associando-a a uma coisa difícil, elitista.

> O momento é para grandes reflexões e para pensarmos, enfim, o que devemos e o que queremos ensinar aos nossos alunos? De que modo podemos agir para que a Matemática retome seu lugar de "rainha das ciências" e não "assassina das indigências", pois para cada instante temos assistido ao processo de degeneração da espécie humana, seleção social, empobrecimento dos já pobres e a ampliação de um analfabetismo não mais justificado: o analfabetismo matemático (MENDES, 2009, p. 11).

O ensino aplicado atualmente utiliza-se, em sua maioria, de um único meio para transmitir o conhecimento aos alunos, porém, o conhecimento não é transmitido para todos de maneira tão simples, com isso, criam-se algumas fragmentações entre os estudantes, impossibilitando a realização de conexões entre o conhecimento matemático e outros conhecimentos cognitivos, ocasionando, portanto, a criação das disciplinas como fator de isolamento das respostas que vão sendo obtidas.

> A maioria das pessoas não consegue relacionar a Matemática nem com as outras ciências e muito menos com situações de seus cotidianos, porque foi criado um universo à parte, ou seja, para elas, a Matemática não está presente em outros contextos (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 24).

Nesse sentido, a matemática acaba se tornando a vilã entre todas as matérias. Como mencionado por Mendes (2009) já faz muito tempo que a matemática deixou de ser a "rainha das ciências", e é preciso fazer algo pra que ela retome esse posto, para que ela deixe de ser vista somente como algo difícil, abominável e volte a ser algo interessante e até agradável.

Cabe mencionar que para que se encontre novos rumos mais atraentes de lecionar matemática se faz necessário convencer o corpo docente a inovar, buscando novas práticas de ensino mais dinâmicas e envolventes, não caindo na monotonia ou em planos de aula estacionados em um modelo único de aprendizagem. Cabe aos professores, bem como a todo o corpo docente, envolver-se em um plano de ação inovador, atrativo e integrado.

Infelizmente, "inovar"no ensino de matemática não é uma tarefa fácil, pois a forma como a matemática tem sido apresentada em sala de aula tem reforçado a ideia da matemática pronta e acabada com suas fórmulas, teoremas e definições, sem espaços para questionamentos sobre tais assuntos.

Entretanto, de acordo com Biembengut e Hein (2010), desafios como o de proporcionar a sociedade um cidadão capaz de comandar a economia, produção, lazer, entre outas atividades tem tornado crescente o movimento em prol da educação nas últimas décadas, ocasionando mudanças no currículo e nos métodos de ensino para que estes forneçam o desenvolvimento de habilidades como a criatividade, resolução de problemas e modelagem.

Biembengut e Hein (2010) relatam que apesar da ideia de modelagem matemática que conhecemos hoje ter surgido desde o Renascimento (entre meados do século XIV e o fim do século XVI), a modelagem matemática no ensino começou a melhor se desenvolver nas últimas três décadas, sendo discutida em diversos países e recebendo posicionamentos a favor e contra a sua utilização no ensino de matemática.

Conforme relatado por Almeida, Silva e Vertuan (2012), a modelagem matemática como constituinte do processo de ensino e aprendizagem surgiu na medida em que se percebeu que os alunos sentiam-se mais motivados a resolver problemas criados por conta própria do que aqueles vindos de outras situações quaisquer que por muitas vezes se tornavam apenas símbolos sem significado por se distanciar da realidade dos alunos. A partir daí, esse procedimento de criação e resolução de problemas focados no ensino e aprendizagem de matemática começou a ganhar força entre os pesquisadores da área de Educação

Matemática e começou a receber adequações para o seu uso em sala de aula, constituindo-se de numa alternativa pedagógica por meio da qual, utilizando a matemática, se resolve um problema não essencialmente matemático, estimulando os alunos à realização de uma atividade útil para o ensino além de poder ser agradável e prazerosa a eles.

> Através da Modelagem, o aluno poderá, valendo-se dos resultados matemáticos relacionados a uma dada situação real, ter melhores condições para decidir o que fazer, uma vez que terá uma base quantitativa que poderá contribuir para a avaliação de aspectos qualitativos da situação apresentada de início (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 29).

Nessa perspectiva, considera-se que a utilização da modelagem matemática em sala gera a possibilidade de ensinar e aprender matemática, além de facilitar a percepção de suas aplicações para a resolução de problemas cotidianos vivenciados pelos alunos mostrando a eles que tudo que lhes é ensinado tem uma aplicação real e que isso um dia lhes pode ser útil, dando um significado ao ensino e auxiliando na construção do conhecimento.

Conforme Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), na modelagem matemática não se deve assistir aos objetos matemáticos ou apenas ser ouvinte tratando-a como pronta e acabada, de forma isolada das demais ciências, mas manipulá-los, rompendo com a concepção de que o professor ensina e o aluno apenas ouve e absorve, acreditando na ideia de que o conhecimento não está somente nem no sujeito nem no objeto, mas na inteiração entre ambos.

Partindo do pressuposto de que todas as ciências são ao mesmo tempo empíricas e teóricas, de acordo com Bassanezi (2010), é notório o potencial do uso da modelagem matemática por proporcionar a união das observações de determinados comportamentos analisados com a teoria já existente à respeito dele para indicar o comportamento verdadeiro por trás das análises. Além disso, seu uso carrega consigo a contextualização entre diversas disciplinas ou áreas de pesquisa, promovendo a multidisciplinariedade.

Apesar de muitas vezes se ter conhecimento sobre as vantagens da utilização da modelagem matemática ela ainda não é muito utilizada no ensino, pois conforme Biembengut e Hein (2010) a condição necessária para a sua implementação é audácia por parte dos professores de modificar a sua prática docente à medida que a utilização de tal metodologia acarretará necessidade de estudo, visto que na maioria dos cursos de graduação, o estudo sobre tal ramo, geralmente, é bem superficial e para se ensinar por meio da modelagem matemática é necessário muito mais do que apenas uma leitura básica sobre o assunto.

Em um primeiro momento, provavelmente, ocorrerá certa insegurança em se trabalhar com tal assunto em sala de aula, a experiência será conquistada com o tempo. Assim sendo, inicialmente, Biembengut e Hein (2010) orientam conhecer alguns modelos clássicos da literatura e adaptá-los para a sala de aula ou aplicar projetos curtos já realizados por outros colegas em uma única turma inicialmente pedindo para que os alunos criem seus próprios modelos a partir da realidade, entre outros.

Apesar de não abordarmos nenhum modelo aplicado ao ensino neste trabalho, as literaturas Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Biembengut e Hein (2010) contém diversos exemplos de modelos matemáticos para o ensino de matemática com interessantes problemas e soluções para serem utilizados em sala de aula ou ao menos servirem de suporte para gerar ideias para trabalhos aplicados em diversos conteúdos matemáticos. A tarefa não é fácil, mas as literaturas existentes dão toda a motivação e suporte necessários com diversas ideias norteadoras para que o professor modifique de acordo com a série de implantação do projeto e aplique em busca de um bom processo de ensino e aprendizado.

3 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA APLICAÇÃO BIOLÓGICA

A modelagem matemática abrange diferentes ramos dentre os quais se situam os modelos de dinâmica populacional, cuja finalidade é a representação das modificações ocorridas na quantidade de indivíduos de uma determinada população ao longo do tempo. Diferentes indivíduos ou populações apresentam diferentes taxas de crescimento, mortalidade, fecundação e reprodução, além de serem predadas por diferentes espécies e possuírem hábitos alimentares diversificados, compondo assim, o seu ciclo de vida em diferentes habitats.

Atualmente, muitas espécies se encontram em perigo de extinção por causa de fatores como destruição do meio ambiente e caça excessiva, por exemplo, dentre outras causas. Devido a tais motivos, vem tornando-se cada vez mais preocupante a busca por meios de prever o tempo de extinção de alguma população ou simplesmente ver em que medida alguns fatores influenciam de forma negativa ou positiva na vida destes.

Os modelos matemáticos de dinâmica populacional podem ser estruturados de maneira mais simples observando apenas as taxas de fecundidade, crescimento e mortalidade, ignorando qualquer fator externo que venha influenciar na dinâmica populacional da determinada espécie ou pode-se realizar uma análise mais detalhada de acordo com os dados que se tem acesso e com a complexidade dos cálculos a serem desenvolvidos e, nessa análise, incluem-se fatores como predação, morte por ações humanas como poluição e desmatamento, mudanças quaisquer ocorridas no ambiente, dentre outros. Entretanto, a realização desses modelos mais detalhados nem sempre é possível uma vez que, conforme Bassanezi (2010), a dificuldade maior em aplicar a matemática às situações biológicas está no fato de que tais fenômenos, geralmente, têm um comportamento complexo onde suas variáveis se comportam fortemente de forma aleatória, sendo sensíveis, muitas vezes, a pequenas perturbações.

O objetivo de um modelo de dinâmica populacional é se aproximar cada vez mais da realidade de modo a ter uma base real para a solução de algum problema verificado, mas à medida que se busca a aproximação da realidade depara-se com a complexidade exigida para a elaboração do modelo, pois, como dito acima, a complexidade dos cálculos se dá diretamente proporcional à quantidade de variáveis envolvidas.

Apesar de sua complexidade, essa área de aplicação da matemática vem ganhando cada vez mais credibilidade, com o aparecimento de novas teorias e técnicas advindas de recursos computacionais, que também se encontram em constante desenvolvimento, transformando o desinteresse ligado a dificuldade em um método fértil para o desenvolvimento da própria matemática em aplicações com resultados pertinentes (BASSANEZI, 2010).

Nas seções seguintes desse capítulo introduzimos alguns conceitos relevantes e alguns modelos clássicos da literatura que tratam da dinâmica de populações isoladas. Tais conceitos e modelos são necessários para os estudos dos modelos de dinâmica populacional apresentados no Capítulo 4.

3.1 Quantidades em um processo dinâmico

No processo de modelagem matemática de dinâmica populacional é comum a utilização de termos denominados "taxas de variação"dentre os quais se enquadram variáveis, parâmetros ou constantes, como: taxas de crescimento, fertilidade, mortalidade, predação, entre outros.

> Quantidades que influenciam em algum processo dinâmico são denominadas variáveis, ou parâmetros e algumas vezes constantes - não existe uma diferença precisa entre estes termos - a distinção é apenas convencional:
> **variáveis** são grandezas que se modificam durante o processo;
> **parâmetros** são medidas auxiliares e podem ou não mudar durante o processo;
> **constantes** são quantidades que não variam e têm seus valores fixados a priori (BASSANEZI; 2010, p. 86).

Assim sendo, para a facilidade de distinção e uma melhor compreensão, utilizamos das definições de variáveis, parâmetros e constantes, citadas acima, em alguns momentos do texto para tratar de determinadas taxas envolvidas nos determinados modelos.

Como as variáveis envolvidas no processo de modelagem são quantitativas, outro fator importante que deve ser observado é a escolha do tratamento das variáveis como contínuas ou discretas, pois existem situações em que modelos contínuos são mais relevantes que discretos e vice-versa.

Definição 3.1 *Um conjunto X é dito discreto se existir um subconjunto $Y \in \mathbb{N}$ tal que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos dos conjuntos X e Y.*

Em outras palavras, um conjunto é discreto se os seus elementos podem ser enumerados da forma $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots$.

Definição 3.2 *Uma variável é dita discreta quando assume apenas valores pertencentes a um conjunto discreto.*

Exemplo 3.1 *Caso se deseje saber a quantidade de recém-nascidos no estado do Espirito Santo no ano de 2017, a variável "quantidade de recém-nascidos"pertenceria a um conjunto discreto contido no conjunto dos números naturais e, portanto, seria discreta.*

Por outro lado, quando um conjunto é dito contínuo. Assim sendo, uma variável é dita *contínua* quando assume qualquer valor real no intervalo dado, ou seja, em um conjunto contínuo.

Exemplo 3.2 *Uma professora ao indagar a altura média dos alunos de uma de suas turmas de 3^a série do ensino médio utilizou-se da variável "altura dos alunos", dada em metros, e descobriu que ela varia no intervalo $[1.51, 1.92]$, observando assim, que a variável é contínua.*

3.2 Equações de diferenças lineares

Na construção de modelos de dinâmica populacional é comum a simplificação de algumas hipóteses para que esse modelo se torne mais simples e acessível sem que seus resultados se afastem da realidade. Para modelos de algumas espécies é mais apropriada a atualização de um modelo de tempo contínuo onde a solução provavelmente será dada através da resolução de equações diferenciais. Entretanto, por questões práticas, pode-se discretizar o tempo procurando simplificar os cálculos necessários para encontrar a solução do modelo, que a partir daí, se utilizará de equações mais simples como equações de diferenças lineares para resolvê-lo, sem que a solução se afaste de forma considerável da realidade. As seguir, de acordo com Diniz (2011), definimos *equações de diferenças lineares* de acordo com suas respectivas ordens.

Definição 3.3 *Uma equação de diferenças linear, de ordem m, é uma equação da forma*

$$a_1 x_{n+m} + a_2 x_{n+m-1} + ... + a_{m+1} x_n = a_{m+2}. \tag{1}$$

De maneira simplificada, uma equação de diferenças linear é uma equação na qual o termo posterior a uma sequência de termos iniciais dados, depende da soma do produto de cada termo anterior por constantes pré-definidas.

A ordem da equação de diferenças é dada pela diferença entre as ordens dos termos da sucessão. Assim sendo a equação descrita acima se trata de uma equação de ordem m, pois $(n + m) - n = m$.

Deste modo, uma equação de diferenças linear de primeira ordem, de maneira geral, é descrita por

$$a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = a_3. \tag{2}$$

Analogamente, para uma equação de diferenças de segunda ordem, a forma geral é dada por:

$$a_1 x_{n+2} + a_2 x_{n+1} + a_3 x_n = a_4. \tag{3}$$

E assim sucessivamente até chegarmos à equação de ordem m descrita em (1).

Por fim, uma equação de diferenças linear de ordem m é dita *homogênea* quando

$$a_1 x_{n+m} + a_2 x_{n+m-1} + ... + a_{m+1} x_n = 0. \tag{4}$$

Dadas as devidas definições utilizadas para um melhor entendimento do capítulo posterior passamos a discorrer sobre alguns modelos clássicos para o estudo de populações isoladas pois, conforme recomendado por Bassanezi (2010), ao tratar de modelagem matemática é interessante conhecer alguns modelos clássicos da literatura. Assim sendo, apresentamos aqui alguns deles que julgamos mais interessantes para o trabalho em questão.

3.3 Modelo de Malthus

Thomas Malthus (1766 - 1834) foi um religioso economista britânico considerado o pai da demografia devido a sua teoria conhecida como Teoria populacional malthusiana, cuja principal hipótese era de que a cada instante a população humana cresceria a uma taxa proporcional à população presente. Assim sendo, Malthus estava convencido de que as taxas de natalidade deveriam ser limitadas, pois, caso contrário, a população cresceria de forma rápida e desproporcional à produção de alimentos gerando, assim, fome e destruição.

Visto que a quantidade de indivíduos de uma determinada população humana, animal ou vegetal varia com o tempo de forma discreta ou contínua, tomando uma população inicial de P indivíduos, sabe-se que P varia com o tempo de forma que podemos escrever:

$$P(t) = \frac{dP}{dt}. \tag{5}$$

onde $\frac{dP}{dt}$ representa a variação do tamanho da população ao longo do tempo.

Desse modo, supondo uma população em que os indivíduos vivam em um ambiente ideal com recursos ilimitados, ausência de caça, competição ou predação, onde as taxas de mortalidade m e fertilidade f permanecem constantes, teremos $P(t)$ como uma função discreta de t onde o modelo malthusiano discreto admite que:

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = f - m = \alpha,$$

Isso é equivalente a afirmar que o crescimento $P\,(t+1) - P\,(t)$ é proporcional à população $P\,(t)$ no tempo t, com taxa de crescimento α,

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t), \tag{6}$$

Ou seja,

$$P(t+1) = (\alpha + 1)P(t). \tag{7}$$

Assim, supondo uma população inicial $P(0) = P_0$, resultaria que no ano seguinte, a população $P(1) = P_1$ seria dada por:

$$P_1 = (\alpha + 1)P_0. \tag{8}$$

De modo análogo, para o ano 2, segue que:

$$P_2 = (\alpha + 1)^2 P_0. \tag{9}$$

Seguindo o raciocínio indutivamente, resulta que em um determinado tempo t, dado em anos por exemplo, a população seria dada por:

$$P_t = (\alpha + 1)^t P_0. \tag{10}$$

Apesar de parecer um modelo simples por considerar poucos fatores, ligados a uma determinada população, que podem vir a mudar o resultado ao longo do tempo, o modelo malthusiano se adapta bem à realidade para pequenos intervalos de tempo e é muito utilizado em análises de dinâmica populacional dessas pequenas populações em curtos intervalos de tempo, como em populações de algumas bactérias e alguns estudos mais simples realizados sobre outras espécies como veremos mais adiante.

3.4 Modelo de Verhulst

De acordo com Bassanezi (2010), quando tratamos de crescimento populacional com taxas constantes, as taxas de crescimento desses determinados modelos obviamente são maiores do que zero e produzem valores que tendem ao infinito à medida que o tempo passa. Entretanto, percebe-se de forma empírica, em laboratórios e na natureza, que as populações só crescem dessa forma em curtos intervalos de tempo até que se cheguem aos limites do ambiente ou habitat quando certas condições, como a falta de alimento, tendem a fazer a taxa de mortalidade ou a taxa de migração da população aumentar e, consequentemente, gera a queda da taxa de crescimento. Matematicamente, pode-se dizer que à medida que a variável tempo cresce, a quantidade de indivíduos de uma população tende para um valor limite suportado pelo ambiente onde essa população vive.

Deste modo, percebe-se que quando tratamos de longos períodos de tempo, modelos como o malthusiano se tornam insuficientes, pois não retratam a realidade da população. Em vista disso, surgiram modelos que promovem variações na taxa de crescimento e o pioneiro nessa área foi o matemático belga Pierre F. Verhulst que em 1837 formulou um modelo que supõe que uma população vivendo em um determinado ambiente cresce até um limite sustentável pelo ambiente onde tende, a partir daí, a se estabilizar.

Pode-se dizer que o modelo de Verhulst é uma modificação do modelo de Malthus, que leva em consideração as restrições ambientais de uma região e considera a taxa de crescimento como proporcional a cada instante não supostamente constante como considerado no modelo malthusiano. Assim, o modelo contínuo de Verhulst pode ser escrito como

$$\beta(P)P = \frac{dP}{dt}, \tag{11}$$

onde $\beta(P) = r\,\dfrac{P_\infty - P}{P_\infty}$, $r > 0$ e P_∞ representa o valor limite da população. Assim, quando P tende a P_∞, segue que $\dfrac{P_\infty - P}{P_\infty}$ tende a 0 e, consequentemente, $\beta(P) = r\,\dfrac{P_\infty - P}{P_\infty}$ tende a 0, o que faz com que a população tenda a um valor constante, ou seja, $\frac{dP}{dt} = 0$.

3.5 Modelo de Leslie

Em 1945, de acordo com Onofre (2017), o matemático Leslie Patrick Holt formulou um modelo matricial conhecido como Modelo de Leslie, ao qual é muito utilizado por biógrafos e demógrafos para determinar o crescimento populacional de uma determinada espécie dividindo sua população de espécimes fêmeas em faixas etárias de mesma duração. Suponha que certa população de fêmeas seja assim dividida em n faixas etárias e que se saiba o número de indivíduos de cada uma delas em um instante $t = 0$, ou seja, que se conheça $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$, $\cdots$, $x_n^{(0)}$ onde $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ correspondem às faixas etárias que de forma matricial resulta em

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_0 , \tag{12}$$

denominado **vetor de distribuição etária inicial**.

Para a realização do modelo são considerados três fatores biológicos que influenciam de forma direta na dinâmica populacional: nascimento, envelhecimento e morte. Uma condição inicial do modelo de Leslie requer que a duração entre os instantes observados seja igual à duração entre duas faixas etárias. Desse modo, todas as fêmeas na classe m no instante t pertenciam a classe $m - 1$ no instante $t - 1$.

Assim, definindo γ_i = número de filhotes fêmeas gerado por cada fêmea da classe i, onde $i = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ e σ_i = taxa de sobrevivência da geração i, resulta a equação

$$x_1^{(t+1)} = x_1^{(t)}\gamma_1 + x_2^{(t)}\gamma_2 + x_3^{(t)}\gamma_3 + \cdots + x_n^{(t)}\gamma_n \tag{13}$$

que, em outras palavras, nos diz que a quantidade de fêmeas pertencentes a primeira faixa etária na geração $t + 1$ é dada pela soma dos produtos da quantidade de fêmeas em cada faixa etária, na geração t, pelas suas taxas de fecundidade correspondentes. Além disso,

$$x_{i+1}^{(t+1)} = x_i^{(t)}\sigma_i, \qquad i = \{1, 2, 3, \cdots, n-1\}, \tag{14}$$

mostrando que a quantidade de fêmeas pertencentes a cada faixa etária, à partir da primeira, na geração $t + 1$, é dada pela quantidade de fêmeas da faixa etária anterior na geração t multiplicada à taxa de sobrevivência da mesma faixa etária. Deste modo, por

(12), (13) e (14), podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_t , \tag{15}$$

ou ainda

$$x^{(t+1)} = L\, x^{(t)}, \tag{16}$$

onde L é denominada **Matriz de Leslie**.

Portanto, conhecendo a Matriz de Leslie e um vetor de distribuição etária inicial é possível determinar a população de fêmeas em algum tempo posterior. A partir daí é natural o surgimento de dúvidas sobre de que forma se dá o comportamento gráfico da dinâmica populacional dessa população. Existirá um momento t_0 em que a população estudada crescerá ou decrescerá? Até que momento ela continuará crescendo ou decrescendo?

De acordo com Diniz (2011) e Onofre (2017), para se ter uma ideia mais geral sobre o crescimento populacional desse tipo de estudo é preciso obter os autovalores associados a matriz de Leslie, por meio das raízes do polinômio característico associado, $P_n(\lambda)$, dado por

$$P_n(\lambda) = det(L - \lambda\, I), \tag{17}$$

com I sendo a matriz identidade de ordem n.

Assim,

$$P_n(\lambda) = det \begin{bmatrix} \gamma_1 - \lambda & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ \sigma_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & -\lambda \end{bmatrix}. \tag{18}$$

De onde afirmamos que

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - \gamma_1\lambda^{n-1} - \gamma_2\sigma_1\lambda^{n-2} - \gamma_3\sigma_1\sigma_2\lambda^{n-3} - \cdots - \gamma_n\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_{n-1}\right). \quad (19)$$

De fato, para $n = 2$,

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \gamma_1 - \lambda & \gamma_2 \\ \sigma_1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \gamma_1\lambda - \gamma_2\sigma_1.$$

Suponha que a afirmação seja válida para n, ou seja, que (19) seja verdade. Desse modo, para uma matriz de Leslie de ordem $n+1$, o polinômio característico é dado por

$$P_{n+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \gamma_1 - \lambda & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_n & \gamma_{n+1} \\ \sigma_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_n & -\lambda \end{vmatrix}, \quad (20)$$

onde por meio de cofatores associados a última coluna resulta que

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\lambda) &= \gamma_{n+1}(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} \sigma_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{vmatrix} \\ &\quad -\lambda(-1)^{2n+2} \begin{vmatrix} \gamma_1 - \lambda & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_n \\ \sigma_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

ou ainda,

$$P_{n+1}(\lambda) = \gamma_{n+1}(-1)^{n+2}|M_1| - \lambda(-1)^{2n+2}|M_2|, \quad (22)$$

onde o determinante de M_1 é dado por $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_n$, pois se trata de uma matriz triangular superior, e o determinante de M_2 é $(-1)^n\left(\lambda^n - \gamma_1\lambda^{n-1} - \gamma_2\sigma_1\lambda^{n-2} - \cdots - \gamma_n\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}\right)$, pela hipótese de indução.

Substituindo os resultados dos determinantes das matrizes M_1 e M_2 em (22), resulta que

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\lambda) &= \gamma_{n+1}(-1)^{n+2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n + \\ &+(-\lambda)(-1)^n\left(\lambda^n - \gamma_1\lambda^{n-1} - \gamma_2\sigma_1\lambda^{n-2} - \cdots - \gamma_n\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}\right) \\ &= (-1)^{n+1}\left(\lambda^{n+1} - \gamma_1\lambda^n - \gamma_2\sigma_1\lambda^{n-1} - \gamma_3\sigma_1\sigma_2\lambda^{n-2} - \cdots - \gamma_{n+1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_n\right) \end{aligned} \tag{23}$$

de onde concluímos, portanto, que a afirmação é válida para todo n, onde n é a ordem de uma matriz quadrada de Leslie.

Por Diniz (2011), dentre as raízes do polinômio $P_n(\lambda)$ podemos definir uma raiz β de modo que

$$\beta = max\begin{cases} |\lambda_j| \;\; se \;\; \lambda_j \in \mathbb{R} \\ \sqrt{a^2+b^2} \;\; se \;\; \lambda_j = (a \pm bi) \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{24}$$

onde $j = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Dessa definição, teremos β como um autovalor positivo associado a matriz de Leslie, resumindo seus valores essenciais. Assim, a equação (16), sem perda de generalidade, é dada por

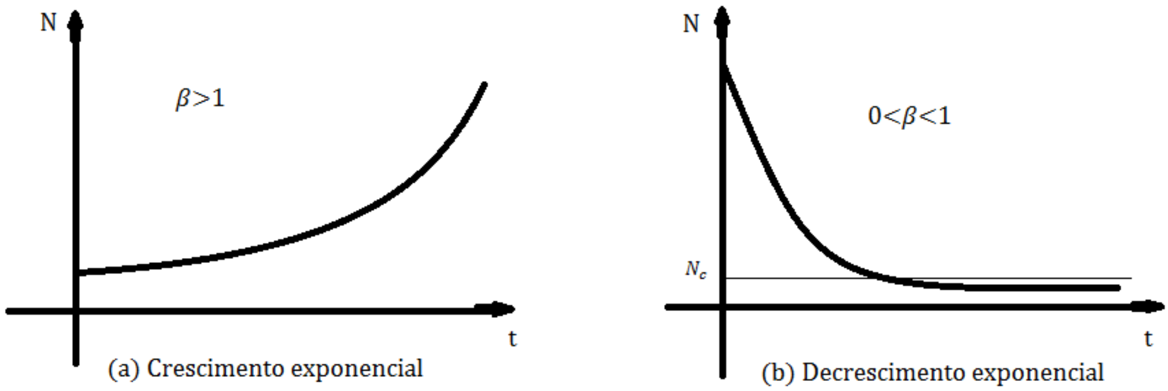
$$x^{(t+1)} = \beta\, x^{(t)}. \tag{25}$$

Neste caso, dado um vetor inicial $x^{(0)}$, note que

$$\begin{gathered} x^{(1)} = \beta\, x^{(0)} \\ x^{(2)} = \beta\, x^{(1)} = \beta^2\, x^{(0)} \\ x^{(3)} = \beta\, x^{(2)} = \beta^3\, x^{(0)} \\ \vdots \\ x^{(n)} = \beta\, x^{(n-1)} = \beta^n\, x^{(0)}. \end{gathered} \tag{26}$$

De onde se conclui que se $\beta > 1$ a população cresce exponencialmente e caso contrário, ou seja, se $0 < \beta < 1$ a população decresce exponencialmente. De acordo com Diniz (2011) e Onofre (2017), podendo atingir um ponto crítico (N_c) de forma demasiadamente rápida quando β se encontra muito próximo de 0. Se uma população se encontrar abaixo do chamado nível crítico N_c, tal população torna-se inviável biologicamente. Conforme a figura abaixo, por meio de β, torna-se mais viável analisar o comportamento da dinâmica populacional da espécie em questão.

Figura 1: Estudo qualitativo do comportamento da solução



Fonte: Diniz (2011, p. 40)

4 MODELOS DE DINÂMICA POPULACIONAL

Nesse capítulo buscamos reescrever alguns modelos encontrados nas literaturas Bassanezi (2010) e Diniz (2011), simplificando-os ou adaptando-os para o texto buscando um melhor entendimento para o leitor. Os modelos foram escolhidos de modo a mostrar a utilização dos modelos clássicos apresentados no capítulo anterior e apresentar as especificidades presentes em diferentes populações.

4.1 Modelo de divisão celular

Divisão celular é o processo que ocorre nos seres vivos, através do qual uma célula, chamada célula-mãe, se divide em duas por meio de um processo denominado mitose ou em quatro células-filhas, por meio de meiose, compondo um processo denominado ciclo celular.

Assim, supondo uma divisão celular sincronizada entre as células-mãe, onde não ocorra morte de nenhuma célula no processo, e, ainda, supondo apenas um método de divisão, denotando por q a quantidade de células-filhas geradas, ou seja, $q = 2$ caso a divisão seja realizada por mitose e $q = 4$ para a divisão por meiose.

Sejam $N_1, N_2, N_3, \cdots, N_m$ os números totais de células nas gerações $1, 2, 3, \cdots, m$. Assim, podemos escrever as seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= qN_0;\\
N_2 &= qN_1;\\
N_3 &= qN_2;\\
&\vdots\\
N_m &= qN_{m-1}.
\end{aligned}
$$

De onde resulta a equação

$$N_{m+1} = qN_m. \tag{27}$$

Entretanto, suponha que se necessite saber a quantidade de bactérias em uma geração distante (N_{100}, por exemplo) dispondo-se dos valores de N_0 e q. Perceba que para resolver tal problema a equação acima necessitaria de substituições sucessivas e longos cálculos até se obter o resultado desejado. Por outro lado, note que

$$N_1 = qN_0;$$

$$N_2 = qN_1 = q(qN_0) = q^2N_0;$$

$$N_3 = qN_2 = q(q^2N_0) = q^3N_0;$$

$$N_4 = qN_3 = q(q^3N_0) = q^4N_0;$$

De onde indutivamente segue que

$$N_m = q^m N_0. \tag{28}$$

Por meio da qual se obtém de forma imediata que $N_{100} = q^{100}N_0$, e além disso é uma equação que se comporta de acordo com o modelo malthusiano de população.

4.2 Modelo de procriação de coelhos

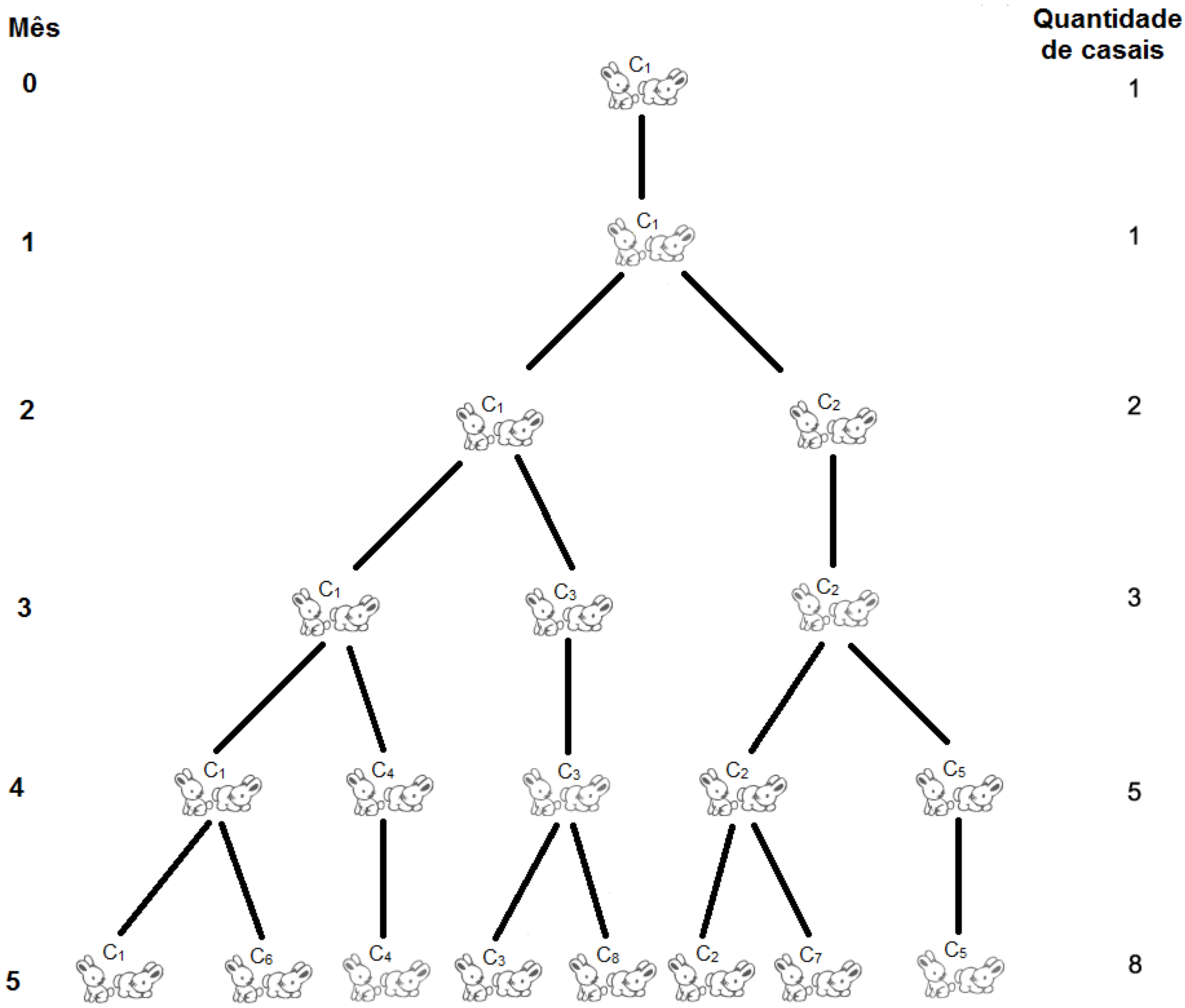
Outra aplicação da modelagem matemática na dinâmica populacional é o problema da procriação de coelhos que, segundo Diniz (2011), foi proposto e apresentado por Fibonacci em 1202, cuja solução trata-se de uma sequência bastante conhecida que leva o nome de "Sequência de Fibonacci", encontrada muitas vezes em livros da educação básica, por tratar-se de uma aplicação interessante da razão áurea e de progressão aritmética.

O problema: *Um homem pôs, em um ambiente cercado, um casal de coelhos recém-nascidos. Supondo que todos os meses cada casal de coelhos dá a luz a um novo casal que é fértil a partir do segundo mês de vida e que não haja mortes, ao fim de um ano, quantos casais de coelhos existirão no cercado?*

Solução: Para obter o modelo matemático que resolve esse problema devemos primeiramente entender de que maneira se dá o processo de procriação dos coelhos a partir do casal inicial.

Suponha que o primeiro casal (C_1) tenha nascido no dia primeiro de janeiro. Desse modo, no dia primeiro de fevereiro o casal C_1 terá um mês de vida e ainda não será fértil ou seja, após um mês ainda haverá apenas um casal no cercado. Continuamente, no dia primeiro de março C_1 atingirá a fertilidade e dará a luz a um novo casal C_2, formando um total de 2 casais. Por conseguinte, no dia primeiro de abril, o casal C_2 ainda não terá atingido a fertilidade, mas o casal C_1 se reproduzirá novamente originando um casal C_3 e totalizando 3 casais. Prosseguindo assim, no dia primeiro maio o cercado conterá 5 casais, no dia primeiro de junho, 8 e assim sucessivamente conforme ilustrado pelo esquema abaixo.

Figura 2: Coelhos de Fibonacci



Fonte: Arquivo pessoal

Podemos definir Q_n^o como a quantidade de casais nascidos na geração n e Q_n a quantidade total de casais na geração n. Sabendo que o problema dispõe-se inicialmente de 1 casal de coelhos, segue que $Q_0 = 1$. Note que a cada mês a quantidade total é dada pela quantidade de casais que nasceram no mês somada a quantidade de casais que haviam no mês anterior, ou seja,

$$Q_n = Q_n^0 + Q_{n-1}. \tag{29}$$

Entretanto, uma das hipóteses do problema é que cada casal nascido se torna fértil a partir do segundo mês, o que resulta em

$$Q_n^0 = Q_{n-2}. \tag{30}$$

Daí, substituindo (30) em (29), segue que

$$Q_n = Q_{n-2} + Q_{n-1}. \tag{31}$$

A última equação, escrita de outra forma, resulta em

$$Q_n - Q_{n-1} - Q_{n-2} = 0, \tag{32}$$

onde (32) é uma equação de diferenças linear homogênea de segunda ordem.

Solução segundo o modelo Malthusiano

Seja $Q_n = \alpha^n Q_0$ uma solução para a equação (32). Assim, ela deve satisfazer a equação, ou seja,

$$\alpha^n Q_0 - \alpha^{n-1} Q_0 - \alpha^{n-2} Q_0 = 0, \tag{33}$$

o que implica que

$$(\alpha^2 - \alpha^1 - 1)\alpha^{n-2} Q_0 = 0. \tag{34}$$

Mas, por hipótese, $Q_0 = 1$. Logo, tem-se $(\alpha^2 - \alpha^1 - 1)\alpha^{n-2} = 0$ que resulta em

$$\alpha = 0$$

ou

$$\alpha^2 - \alpha^1 - 1 = 0.$$

Se $\alpha = 0$, teremos $Q_n = 0$ para todo n (solução trivial). Por outro lado, se $\alpha^2 - \alpha^1 - 1 = 0$ recaí-se em uma equação algébrica do segundo grau, onde utilizando a fórmula resolutiva, obtemos:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}.$$

Portanto, as soluções são:

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e

$$\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

onde α_1 e α_2 são soluções para $Q_n = \alpha^n Q_0$. Deste modo, sem perda de generalidade, podemos admitir que uma combinação linear entre α_1 e α_2 também será uma solução, ou seja,

$$Q_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n A + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n B. \tag{35}$$

Entretanto, sabemos das hipóteses iniciais do problema que $Q_0 = 1 = Q_1$, que substituídos na equação acima geram o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) A + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) B = 1, \end{cases} \tag{36}$$

cuja solução é dada por

$$B = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

e

$$A = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Logo, por (35), resulta que

$$Q_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{37}$$

onde (37) é uma solução para o problema dado que gera a sequência de Fibonacci quando

n assume os valores do conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Um fato interessante a respeito do estudo dessa dinâmica populacional geradora da sequência de Fibonacci é que tal sequência carrega consigo fatos interessantes como o descoberto pelo autor das leis das órbitas celestes, Johannes Kepler, citado por Cunha (2017), que em 1611 descobriu que à medida que a sequência cresce o resultado da divisão de cada termo pelo termo anterior se aproxima cada vez mais do número de ouro $\left(\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398\right)$. Em outras palavras,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{1}{2} \frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n + \left(5+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n + \left(5+\sqrt{5}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

visto que $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n$ tende a 0 quando n tende a ∞ uma vez que $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$.

Segundo Cunha et al (2017), o número de ouro ou razão áurea trata-se de um número irracional misterioso que aparece em uma infinidade de elementos da natureza por meio de uma razão. No corpo humano podemos encontrar o número de ouro em razões como a distância dos ombros até a ponta dos dedos pela distância do início do cotovelo até os dedos e na altura do corpo pela distância do umbigo ao chão. Em uma população de abelhas de uma colmeia a divisão do número de abelhas fêmeas pelo número de abelhas macho também é igual ao número de ouro. Assim como nas folhas de girassol, o fator de aumento do diâmetro de suas espirais é igual a ϕ. Fato que inspirou e inspira muitas pessoas a pesquisarem sobre esse número misterioso.

4.3 Modelo de criação de Tilápia do Nilo em tanques

O problema: *Um dono de terras chamado Antônio decidiu investir na criação de "Tilápia do Nilo"em tanques. Para se informar sobre a espécie e as formas de manejo da criação, Antônio procurou um profissional da área que lhe deu as seguintes informações:*

-O ciclo de vida da espécie é composto por essencialmente três estágios: ovos, jovens e

adultos.

-Aproximadamente aos quatro meses de idade os peixes atingem a fase adulta e podem se reproduzir efetuando desova a cada dois meses desde que a temperatura da água seja maior que vinte graus celsius.

-Num processo contínuo de criação de peixes é recomendável que um terço da população seja composto por machos.

-O número de larvas produzidas em uma desova varia de 100 *a* 600*, de acordo com o tamanho da fêmea.*

-A taxa de mortalidade por desova é de aproximadamente 50%*.*

Após as sugestões, Antônio decidiu começar sua produção com uma população de 150 *peixes adultos, composta por* 100 *fêmeas e* 50 *machos. Antônio deseja progredir com a criação sem vendas ou abates durante um ano de teste até que atinja uma população considerável.*

Supondo que as fêmeas atinjam a fase adulta aos quatro meses e se reproduzam a cada dois meses gerando 400 larvas a cada desova, com taxa de sobrevivência de 50% *e com metade da população de alevinos composta por espécimes fêmeas. Quantos espécimes, aproximadamente, a população de tilápias conterá após esse tempo?*

Solução geral: Considere as seguintes variáveis:

P_o= população inicial de peixes adultos, sendo $\frac{2}{3}$ fêmeas;
θ= quantidade de ovos por fêmea a cada desova, com 50% de chance de sobrevivência;
P_t= quantidade de peixes adultos na geração t;
A_t= quantidade de alevinos na geração t.

Desta forma, considerando gerações sucessivas de 2 meses, o modelo que descreve a população em questão é dado de acordo com a tabela 1 que segue abaixo.

Assim, a solução para o problema de Antônio seria dada conforme a tabela 2. Verificando que a população dessa espécie cresce de forma demasiadamente rápida quando restringida as condições dadas inicialmente pois, como no modelo malthusiano, não são consideradas taxas de mortalidade durante o processo e supõe-se um manejo adequado com um

Tabela 1: Tilápias do Nilo

$t =$ tempo (2 meses)	$P_t =$ adultos	$F_t =$ fêmeas	$A_t =$ alevinos
0	P_0	$\frac{2}{3}P_0$	0
1	P_0	$\frac{2}{3}P_0$	$\frac{\theta}{2}F_1$
2	P_0	$\frac{2}{3}P_0$	$\frac{\theta}{2}F_2 + \frac{\theta}{2}F_1$
3	$P_0 + A_1$	$\frac{2}{3}P_0 + \frac{1}{2}A_1$	$(A_2 - A_1) + \frac{\theta}{2}F_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$P_{t-1} + A_{t-2}$	$F_{t-1} + \frac{1}{2}A_{t-2}$	$(A_{t-1} - A_{t-2}) + \frac{\theta}{2}F_t$

Fonte: Bassanezi (2010, p. 99)

ambiente capaz de suportar o crescimento elevado de tal população.

Tabela 2: População de Tilápias do Nilo de Antônio ao longo de 1 ano

tempo (2 meses)	adultos	fêmeas	alevinos	População Total
0	150	100	0	150
1	150	100	20.000	20.150
2	150	100	40.000	40.150
3	20.150	10.100	40.000	60.150
4	60.150	30.100	2.020.000	2.080.150
5	100.150	50.100	12.000.000	12.100.150
6	2.120.150	1.060.100	222.000.000	224.120.150

Fonte: Arquivo pessoal

4.4 Modelo Tartaruga-da-amazônia

A primordial importância desse modelo se dá pelo fato de que, segundo Diniz (2011), pesquisadores do Instituto de Pesquisa da Amazônia (INPA), buscando uma solução para o problema do risco de extinção com o qual algumas espécies encontradas na floresta Amazônica se deparam, têm buscado a utilização da Modelagem Matemática para o estudo da dinâmica populacional dessas espécies para, por meio disso, obter um maior embasamento que auxilie na tomada de decisões visando a preservação de tais espécies.

Utilizando alguns dados do Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (IBAMA), Diniz e Santos (1997), formularam o seguinte modelo matemático que indicou se a espécie estava ou não em risco de extinção.

O problema: *Determinar de que forma se dá a dinâmica populacional da espécie Tartaruga-da-amazônia no local estudado sabendo que as fêmeas da espécie em questão atingem a maturidade sexual após os 9 anos de idade e a partir daí realizam desova uma* *vez por ano.*

Solução geral: Para determinar a solução do problema considere as seguintes variáveis com base na população de fêmeas da espécie:

$N_0^{(t)}$ = número de ovos na geração t;

$N_1^{(t)}$ = número de filhotes fêmeas com até 1 ano na geração t;

$N_2^{(t)}$ = número de filhotes fêmeas de 1 até 2 anos na geração t;

$\vdots$

$N_9^{(t)}$ = número de jovens fêmeas de 8 até 9 anos na geração t;

$N_{10}^{(t)}$ = número de indivíduos fêmeas acima de 9 anos na geração t;

γ = número de ovos que cada fêmea produz;

σ_i = taxa de sobrevivência da classe N_i;

μ = taxa de mortalidade de espécies adultas e, consequentemente, a taxa de sobrevivência das espécies adultas é $1 - \mu$.

Desta forma, obtem-se as seguintes equações:

$$N_0^{(t+1)} = \gamma \, N_{10}^{(t)}, \tag{38}$$

$$N_1^{(t+1)} = \sigma_0 \, N_0^{(t)}, \tag{39}$$

$$N_2^{(t+1)} = \sigma_1 \, N_1^{(t)}, \tag{40}$$

$$N_3^{(t+1)} = \sigma_2 \, N_2^{(t)}, \tag{41}$$

$$N_4^{(t+1)} = \sigma_3 \, N_3^{(t)}, \tag{42}$$

$$N_5^{(t+1)} = \sigma_4 \, N_4^{(t)}, \tag{43}$$

$$N_6^{(t+1)} = \sigma_5 \, N_5^{(t)}, \tag{44}$$

$$N_7^{(t+1)} = \sigma_6 \, N_6^{(t)}, \tag{45}$$

$$N_8^{(t+1)} = \sigma_7 \; N_7^{(t)}, \tag{46}$$

$$N_9^{(t+1)} = \sigma_8 \; N_8^{(t)}, \tag{47}$$

$$N_{10}^{(t+1)} = \sigma_9 \; N_9^{(t)} + (1-\mu) \, N_{10}^{(t)}. \tag{48}$$

Note que as equações descritas de (38) a (48) podem ser representadas matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ N_{10} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ \sigma_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_9 & 1-\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ N_{10} \end{bmatrix}_{t}, \tag{49}$$

onde, de forma simplificada, podemos escrever

$$N^{(t+1)} = A \; N^{(t)}. \tag{50}$$

Observe que A é a Matriz de Leslie descrita na seção 3.5 com $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_9 = 0$, o que é plausível tendo em vista que a população em questão só é fertil na classe N_{10}.

Assim, por (50) e dado um vetor inicial $N^{(0)}$, podemos deduzir indutivamente, como em (26), que

$$N^{(t)} = A^t \cdot N^{(0)}. \tag{51}$$

Resultados de um caso estudado

Como citado inicialmente, esse modelo formulado em Diniz e Santos (1997) serviu de base para indicar se a espécie “Tartaruga-da-amazônia”se encontrava ou não em risco de extinção.

Para o estudo foi considerado que o número de indivíduos fêmeas representava metade da população, ou seja, que a razão sexual dada pelo número de espécimes fêmeas sobre a quantidade total de indivíduos fosse igual a $\frac{1}{2}$. De acordo com fontes citadas em Diniz (2011), assumiu-se que cada fêmea realiza uma desova de cerca de 90 ovos ($\gamma = 90$), dos quais apenas $81,6\%$ sobrevivem. Assim, como a razão sexual é igual a $\frac{1}{2}$, $40,8\%$ das fêmeas nasceriam em cada desova ($\sigma_0 = 0,408$). Além disso, estimou-se, por meio de fontes, que 5% dos filhotes que nascem conseguem sobreviver até um ano de vida ($\sigma_1 = 0,05$) e apenas 1% chega a fase adulta, concluído assim que, $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdots \sigma_9 \approx 0,05$. Por fim, a mortalidade na fase adulta foi estipulada em 95% constatando que $1 - \mu = 0,05$.

Deste modo, considerando o polinômio característico associado a matriz A dada em (49), resulta por (19) que:

$$P(\lambda) = -\lambda^{11} + (1-\mu)\lambda^{10} + \gamma \cdot \sigma_0 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6 \cdot \sigma_7 \cdot \sigma_8 \cdot \sigma_9, \tag{52}$$

de onde segue por meio das informações mencionadas acima que

$$P(\lambda) = -\lambda^{11} + 0,05\lambda^{10} + 0,01836. \tag{53}$$

Desta forma, para estimar o valor de β, dado em (24), utilizou-se o seguinte teorema demonstrado em Cláudio e Martins (apud DINIZ, 2011).

Teorema 4.1 *(Kojima). Dado um polinômio $p(\epsilon) = a_n\epsilon^n + a_{n-1}\epsilon^{n-1} + \cdots + a_0$, então toda raíz α real ou complexa verifica*

$$|\alpha| \leq Q_1 + Q_2,$$

onde Q_1 e Q_2 são os maiores valores obtidos do conjunto

$$\left\{ \left|\frac{a_i}{a_n}\right|^{\frac{1}{n-i}}, i = 0, 1, \cdots, n-1 \right\}.$$

Assim, aplicando o teorema acima no polinômio dado em (53), resulta que

$$Q_1 = \left|\frac{0,05}{-1}\right|^{\frac{1}{1}} = 0,05 \ \ e \ \ Q_2 = \left|\frac{0,01836}{-1}\right|^{\frac{1}{11}} = 0,6952968203915.$$

Como β determinado por (24) é uma raiz de $P(\lambda)$, segue que

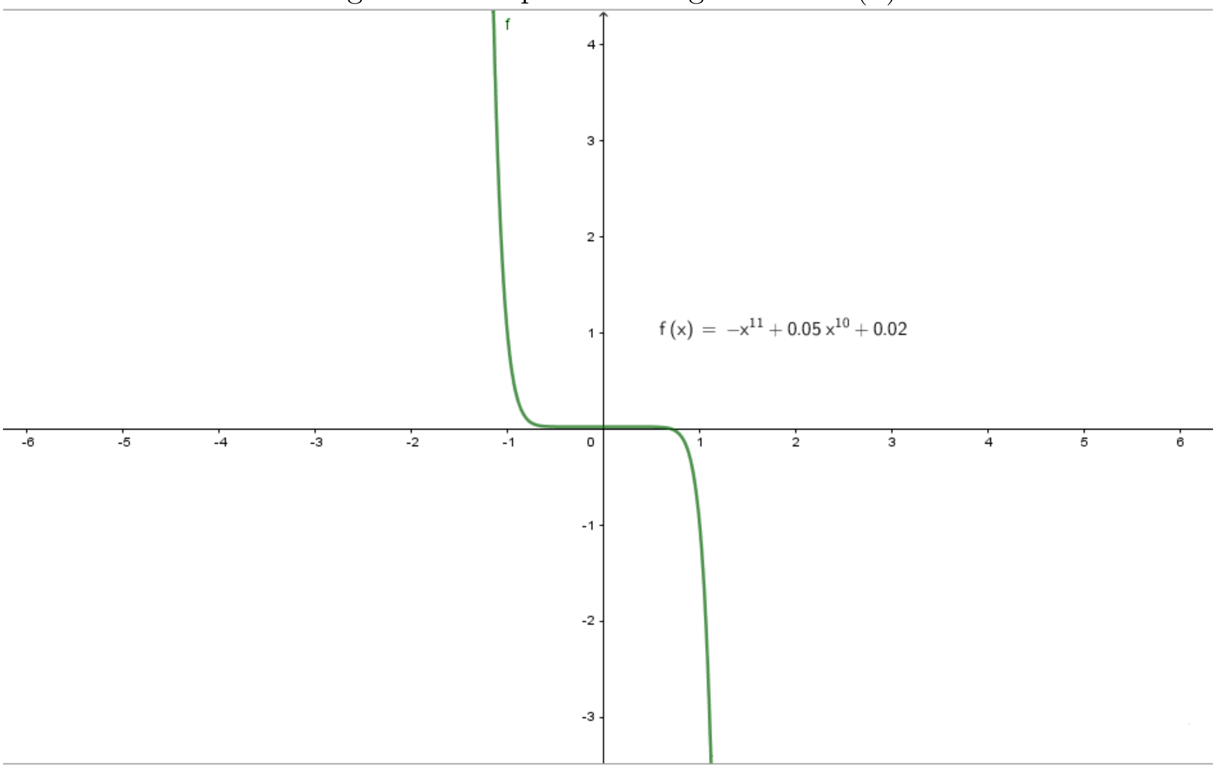
$$\beta \leq Q_1 + Q_2.$$

De onde conclui-se que

$$0 \leq \beta \leq 0,745296820391.$$

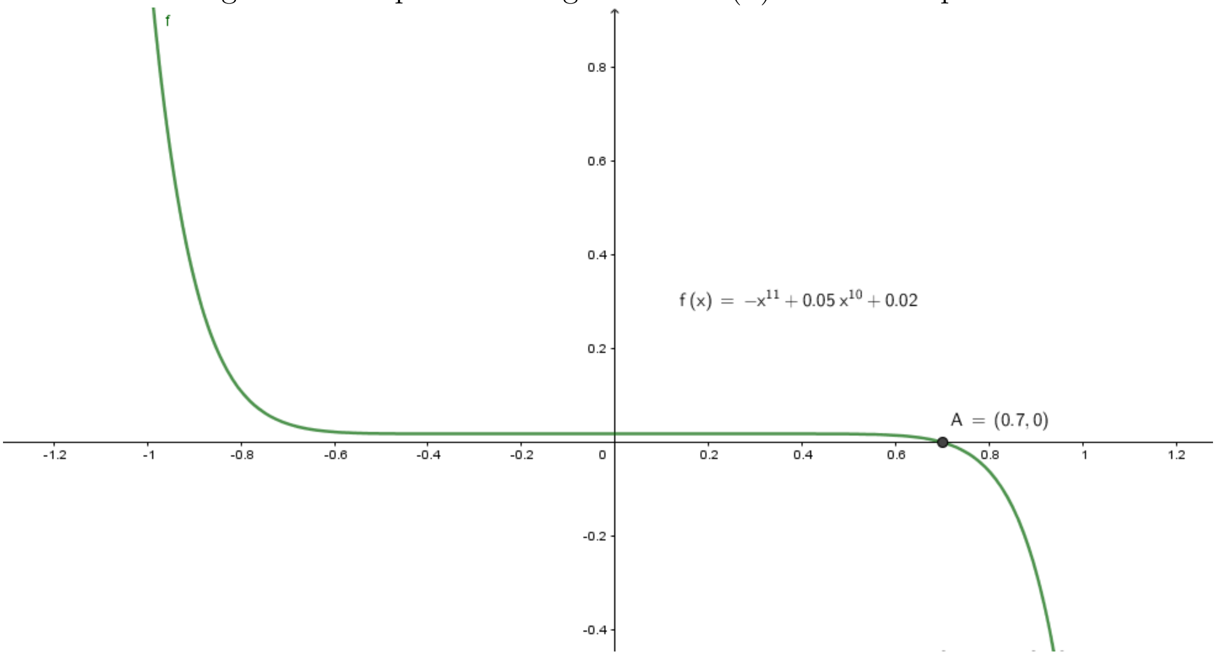
De fato, utilizando o software *Geogébra* para a vizualização gráfica aproximada do polinômio descrito pela equação (53), conforme as figuras 3 e 4, apresentadas abaixo, percebemos que as raízes de $P(\lambda)$ se encontram entre -1 e 1. De modo mais espécifico, o polinômio dado possui apenas uma raiz que se encontra, aproximadamente, no ponto $(0.7, 0)$, conforme mostrado pela recorte ampliado do gráfico (figura 4). Mostrando que a aproximação determinada pela desigualdade acima, $0 \leq \beta \leq 0,745296820391$, está correta.

Figura 3: Comportamento gráfico de $P(\lambda)$



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 4: Comportamento gráfico de $P(\lambda)$ - versão ampliada



Fonte: Arquivo pessoal

Por meio disso, Diniz e Santos (1997) puderam concluir que a população estava decrescendo exponencialmente, determinando assim, que a população seria extinta caso não houvesse a adoção de politicas de proteção adequadas para a preservação da espécie.

Um fato reconfortante é que, em Brasil (acesso em 05 nov. 2018), atualmente a espécie é protegida pelo Programa Quelônios da Amazônia (PQA), que consiste em uma iniciativa de conservação da biodiversidade coordenada pelo IBAMA. O programa foi criado em 1979 para conter a exploração econômica predatória da Tartaruga-da-amazônia no país e reverter o quadro de decréscimo populacional da espécie. Atualmente o programa monitora cerca de 50 mil fêmeas em idade reprodutiva em oito estados brasileiros: Amapá, Amazonas, Goiás, Mato Grosso, Pará, Tocantins, Rondônia e Roraima. Além disso, em 2018 o programa alcançou a marca de $79,4$ milhões de filhotes nascidos em razão do manejo realizado por analistas ambientais do Instituto, técnicos de instituições parceiras e comunidades ribeirinhas.

Em vista disso, é possível concluir que os diversos estudos realizados sobre a espécie, como em Diniz e Santos (1997), tiveram grande impacto no auxílio de sua preservação, destacando a importância da aplicação destes em situações reais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que o presente trabalho seja útil para que se tenha uma visão sobre a importância da modelagem matemática no contexto biológico tanto para pesquisas de preservação ou acompanhamento da dinâmica populacional de espécies quanto para o ensino básico que necessita de métodos que permitam que o aluno associe o que lhe é ensinado a situações reais. Mostrando que a Matemática pode ser aplicada em diversas situações concretas e, inclusive, associada a outras disciplinas do currículo escolar, é possível que os alunos percebam sua importância e enxerguem a matemática de uma forma mais "atraente", adquirindo um desejo maior pelo seu estudo, bem como das outras ciências, aprimorando, assim, suas habilidades cognitivas.

Acreditamos que o processo de ensino e aprendizagem utilizando-se da Modelagem Matemática se tornará mais eficiente e gratificante na medida em que o aluno passe a aprender-fazendo, pensando e criando soluções sem modelos prontos que limitem sua criatividade, tornando-se assim, corresponsável pelo seu aprendizado. Com isso, o professor no papel de orientador também se beneficia uma vez que haverá uma colaboração mútua em busca de um bom aprendizado.

Esperamos ainda que seja útil para enriquecimento da própria matemática e raciocínio do leitor, desenvolvendo seu pensamento crítico sobre as situações apresentadas e incentivando-o a pesquisar e se aprofundar cada vez mais nesse assunto que vem ganhando força e está presente em diversas ciências. Ressaltamos ainda, que o presente trabalho pode servir para apresentações de aplicações que envolvem o uso dos conteúdos de matrizes e função exponencial na educação básica ou em um curso de Àlgebra linear, por exemplo, podendo estimular o interesse dos alunos.

Nos quatro modelos de dinâmica populacional desenvolvidos, procuramos estabelecer uma escrita bem clara, utilizando-se de uma matemática relativamente simples, de modo a facilitar o entendimento para que mesmo pessoas inexperientes na utilização da modelagem possam experimentar aventurar-se nesta "nova modalidade"de ensino e pesquisa.

Começamos mostrando um modelo bem simples sobre divisão celular, que é muito encontrado nos textos sobre esse assunto, para partirmos à modelos um pouco mais elaborados como o modelo de procriação de coelhos que resulta na famosa "Sequência de Fibonnaci"e o modelo das Tilápias do nilo que incluem mais variáveis, tornando-se assim, um pouco mais complexos. Por fim, descrevemos o modelo que descreve a dinâmica populacional da espécie Tartaruga-da-amazônia relatando um caso real, estudado por Diniz e Santos (1997), que ressalta de forma mais evidente a importância da Modelagem Matemática que vai além de desenvolvimento próprio de estudos e aprimoramento da ciência. Lá se percebe de forma clara em que medida tais estudos podem ser realmente úteis para uma situação real, indo além do papel e caneta para auxiliar na preservação de uma espécie da nossa essencial fauna brasileira.

REFERÊNCIAS

[1] ALMEIDA, L. W. A.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

[2] BASSANEZI, R. C. **ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 3^a ed.1^a reimpressão. São Paulo: Contexto, 2010.

[3] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5.ed., 1^a reimpressão. São Paulo, 2010.

[4] BRASIL. Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis. **Notícias**. Disponível em <https://www.ibama.gov.br/noticias/436-2018/1430-programa-quelonios-da-amazonia-80-milhoes-de-filhotes-em-39-anos>. Acesso em: 05 nov. 2018.

[5] CUNHA, J. A. R, et al. **Evolução dos processos físicos nos modelos de dinâmica de populações**. Revista brasileira de ensino de física, 2017, v. 39, n. 3, 2017.

[6] DINIZ, G. L. **Equações de diferenças e sistemas com aplicações biológicas**. Notas em matemática aplicada; v. 54. São Carlos, SP: SBMAC, 2011.

[7] DINIZ, G. L.; SANTOS. C. I. **Crescimento Populacional da Tartaruga-da-Amazônia (*Podocnemis expansa*)**, Biomatemática, 7, (1997), 128 – 33.

[8] MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula, tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2^a ed. Coleção contextos da ciência. Livraria da física, 2009.

[9] MEYER, J. F. C.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3^aed. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

[10] OLIVEIRA, F. B. **Modelagem e Sequências Numéricas**. 2013. 56 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, 2013.

[11] ONOFRE, M. M. **Matriz de Leslie aplicada aos modelos populacionais**. 2017. 80 f. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós Graduação em Matemática, Florianópolis, 2017.