Universidade Federal do Espírito Santo

Departamento de Matemática Aplicada

Curso de Licenciatura em Matemática

Thiago de Souza

RECURSOS COMPUTACIONAIS COMO ESTRATÉGIA DIDÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

São Mateus

2021

Thiago de Souza

RECURSOS COMPUTACIONAIS COMO ESTRATÉGIA DIDÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemátca Aplicada da Universidade Federal do Espirito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática. Orientador: Professor Doutor Fernando Pereira Paulucio Reis.

São Mateus

2021

Thiago de Souza

RECURSOS COMPUTACIONAIS COMO ESTRATÉGIA DIDÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemátca Aplicada da Universidade Federal do Espiríto Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática. Orientador: Professor Doutor Fernando Pereira Paulucio Reis.

Aprovada em xx de Setembro de 2021.

Comissão Examinadora

Prof. Dr.Fernando Pereira Paulucio Reis
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof.(a) Dr.(a) Andressa Cesana (Examinadora), UFES
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Maico Felipe Silva Ribeiro (Examinador), UFES
Universidade Federal do Espírito Santo

Agradecimentos

Agradeço à Deus, à minha família e todos que contribuíram para a realização desse sonho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre alternativas didáticas no ensino de equações do segundo grau e função quadrática. A abordagem faz uso de recursos computacionais. Iniciamos fundamentando teoricamente o enfoque adotado. Em seguida, exploramos fatos importantes da história da equação e função quadráticas, apresentando os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento de formulas, relações matemáticas, teoremas e aplicações práticas. Foi utilizado um software de simulação para realização e obtenção das soluções, determinação dos vértices e reprodução gráfica da curva da função em estudo. Concluímos com atividades e resolução de problemas para aplicação em sala de aula.

Palavras-chave: Função quadrática; História da Matemática; Software de simulação; didática de ensino.

Abstract

In this work we present a study on didactic alternatives in the teaching of second degree equations and quadratic function. The approach makes use of computational resources. We begin with theoretically fundamental approach adopted. Then, we explore important facts in the history of equation and quadratic functions, the mathematicians origins that contributed to the development of formulas, mathematical relations, theorems and practical applications. Simulation software was used to perform and obtain the solutions, determination of vertices and graphic reproduction of the characteristic curve of the function under study. We conclude with activities and problem solving for application in the classroom.

Keywords: Quadratic function; History of Mathematics; simulation software; teaching didactics.

Lista de Figuras

1 Esquema do processo desenvolvido por Descartes. 21

2 Dedução do método de Lieslie. 24

3 Interface do GEOGEBRA 26

4 Comandos algébricos e geométricos no GEOGEBRA. 27

5 Quadrado com lado medindo x e dois retângulos com lados x e $\frac{b}{2a}$. 34

6 Completando o quadrado 34

7 Parábola de foco F e vértice V. 35

8 Gráfico de duas parábolas com concavidades distintas. 36

9 Equação e função quadráticas 37

10 Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ 38

11 Comando para inserção das funções no software. 40

12 Características das curvas para cada função inserida no software GeoGebra. 41

13 Representação dos vértices das funções $f(x)$ e $p(x)$. 44

14 Representação dos vértices x e y, das funções $g(x)$ e $h(x)$. 45

Lista de Tabelas

1 Cálculo da imagem da função $y = x^2 - 3x + 2$ para alguns pontos dados. . 39

2 Cálculo da imagem da função $y = -3x^2 - 7x + 6$ para alguns pontos dados. 39

4 Cálculo da imagem da função $y = y = x^2 - 4x$ para alguns pontos dados. . 40

3 Cálculo da imagem da função $y = -x^2 + 3x + 4$ para alguns pontos dados. 40

Sumário

1 Introdução **10**

1.1 Objetivo geral 11

1.2 Objetivos específicos 11

1.3 Justificativa do tema 11

2 Referencial teórico **12**

2.1 Base Nacional Comum Curricular (BNCC) 12

2.2 Importância da História da Matemática como metodologia de ensino 13

2.3 Recursos computacionais para o processo de ensino de Matemática 14

3 Aspectos Históricos **17**

3.1 Al-Khowârizmî 17

3.2 Sridhara e Bhaskara 19

3.3 René Descartes 20

3.4 François Viète 22

3.5 Sir John Lieslie 23

4 Ambiente de programação do GEOGEBRA **26**

5 Geogebra como ferramenta auxiliar no ensino de funções quadráticas **32**

5.1 Raízes de uma equação polinomial do segundo grau 32

5.2 Construção de gráficos 35

5.3 Proposta de atividades 39

6 Considerações Finais **47**

Referências **48**

1 Introdução

A matemática está presente em diversas situações do cotidiano, exigindo interpretação correta para que se possam usufruir dos resultados que ela proporciona. A partir disso, buscamos soluções numéricas, algébricas ou analíticas para a resolução de enigmas, problemas concretos ou abstratos. Nesse contexto, as equações matemáticas e as funções ocupam um lugar especial, uma vez que modelam grande parte dos fenômenos naturais e tecnológicos que nos rodeiam.

Em especial, as equações e funções polinomiais se encontram entre os mais célebres tópicos no ensino de matemática. Isso se justifica tanto por sua importância teórica, quanto por sua aplicabilidade, a qual permite obter soluções satisfatórias para a resolução de problemas lineares e não lineares.

Apesar de ser muito difundido, esse tema ainda é ensinado, na maioria das vezes com uma metodologia tradicional ineficiente. De fato, diante de uma abordagem enfatizada na memorização de fórmulas e manipulações algébricas, os alunos frequentemente não conseguem vislumbrar a grandeza e amplitude das equações e funções polinomiais.

Atualmente, as equações e funções polinomiais do segundo grau estão entre os principais tópicos na formação matemática básica dos estudantes. E, assim como o ensino de matemática em geral, é preciso realizar uma reformulação da metodologia aplicada no processo de ensino e aprendizagem. Paralelamente ao desenvolvimento tecnológico atual, os softwares voltados para a educação se apresentam como uma eficiente alternativa na modernização do ensino. Além disso, narrativas históricas interessantes surgem da forma como as teorias matemáticas foram construídas ao longo do tempo, delineadas pela biografia dos renomados matemáticos que contribuíram na construção das definições e teoremas sobre equações do segundo grau e funções quadráticas.

Neste trabalho, serão explorados esses e outros aspectos históricos da equação de segundo grau e da função quadrática, bem como os métodos de resoluções.

1.1 Objetivo geral

Apresentar uma proposta pedagógica para auxiliar o professor de matemática em uma prática docente com relação ao ensino da equação do segundo grau e funções quadráticas;

1.2 Objetivos específicos

- Analisar os métodos de resolução para determinar as raízes de uma equação do segundo grau;
- Utilizar o software GeoGebra para estudar o gráfico de uma função quadrática;
- Propor atividades didáticas relacionadas ao tema para prática em sala de aula.

1.3 Justificativa do tema

A abordagem é justificada por tendências da educação matemática. Ou seja, o uso de recursos computacionais, em especial o software Geogebra como metodologia auxiliar de ensino e técnicas de resolução de problemas. Adicionalmente, serão apresentadas propostas de atividades e resolução de problemas.

O trabalho está dividido da seguinte forma: A introdução é feita no presente capítulo (Capítulo 1). No capítulo 2 é estabelecido o referencial teórico que fundamenta a pesquisa justificando sua relevância. No capítulo 3 elencamos alguns aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento da teoria sobre equações do segundo e funções quadráticas, reunindo também biografias de alguns dos matemáticos envolvidos e suas respectivas descobertas. No capítulo 4, iniciando pela apresentação da interface do software Geogebra, apresentamos um tutorial básico das principais ferramentas de programação. O capítulo 5 é dedicado à criação de metodologias pedagógicas utilizando o software Geogebra como ferramenta auxiliar no processo de ensino das equações e funções quadráticas. Utilizando recursos do Geogebra foi feito um estudo detalhado do processo de obtenção das raízes da equação do segundo grau e da construção de gráficos da função quadrática. O capítulo 6 contém importantes considerações, conclusões e uma breve discussão sobre trabalhos futuros.

2 Referencial teórico

2.1 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC (BRASIL, 2018) é um documento previsto na atual Constituição Federal, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1996 e no Plano Nacional de Educação de 2014 cujo objetivo é a garantia da aprendizagem mínima de conhecimentos e habilidades comuns em todo o país.

> A Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que a tenham seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2018, p. 7).

No desenvolvimento do que orienta a BNCC elencam-se 10 competências gerais da Educação Básica com o objetivo de consolidar os direitos de aprendizagem. Como fundamentação do presente trabalho, serão apresentadas as seguintes (BRASIL, 2018, p. 9):

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Pode-se notar que, segundo a BNCC, para que a aprendizagem mínima seja pleiteada as competências gerais devem ser desenvolvidas. Ver-se-á no desenvolvimento destas páginas a fundamentação da Educação Matemática para o uso da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem e técnicas de resolução de problemas (análise, investigação, conjecturas, etc), ou seja, a manutenção das competências gerais da BNCC.

2.2 Importância da História da Matemática como metodologia de ensino

Em uma perspectiva tradicional, a realidade da prática do ensino de matemática corre o risco de se limitar a uma apresentação de leis e regras abstratas acompanhadas de um raciocínio dedutivo com ausência de problemas e situações reais ou cotidianas.

Entretanto, muitos teóricos da Educação defendem atualmente a conexão entre a realidade do processo de aprendizagem com a origem do objeto ou conceito a ser trabalhado, visando a formação do aluno como cidadão e a formação do professor, inicial e continuada.

De acordo com Beatriz S. D'Ambrosio (2007), a metodologia tradicional tem se tornado cada vez mais obsoleta diante das situações cotidianas. Ainda, ressalta que os problemas presente nos livros didáticos não se aproximam da realidade. Além disso, descreve vários motivos fundamentando a relevância da História da Matemática na formação de futuros professores.

O conhecimento de fatos históricos proporciona ao professor de matemática uma orientação no desenvolvimento do ensino. De fato, autores como Ubiratan D'Ambrosio (2012), defendem que as abordagens de ensino por meio de fatos históricos se fazem necessárias ainda que não seja atingida a ideia precisa e completa do conhecimento histórico transmitido.

> Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre porque e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. Isso é particularmente notado no que se refere a conteúdos. A maior parte dos programas consiste de coisas acabadas, mortas e absolutamente fora do contexto moderno. Torna-se cada vez mais difícil motivar alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância. (D'AMBRÓSIO, 2009, p. 29.)

É preciso ressaltar que nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental estão presentes orientações e justificativas para o recurso de história da Matemática, explicitando a importância do uso desta prática.

> Em muitas situações, o recurso à história da matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os de conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 43)

Além disso, conexões com outras manifestações culturais podem ser estabelecidas com o uso da história da Matemática como recurso didático. De acordo com Beatriz S. D'Ambrosio (2007), o professor que tem conhecimento de história da matemática enxerga as teorias como resultados de experiências matemáticas desenvolvidas com muito esforço em épocas passadas. Assim, pode-se obter uma visão cronológica das descobertas, diferentemente das apresentadas nos livros didáticos.

Portanto, é de fundamental importância compreender as origens dos temas abordados em sala de aula.

2.3 Recursos computacionais para o processo de ensino de Matemática

Ao avaliar uma atividade proposta para o ensino, devemos considerar aspectos teóricos e metodológicos específicos, bem como as recomendações propostas nos documentos oficiais que regem a educação brasileira, em especial a *Base Nacional Comum Curricular*, conforme mencionado na Seção 2.1.

Concomitantemente, muito se discute sobre a utilização de tecnologias da informação na prática docente. Além disso, em contraposição à ineficiência dos métodos tradicionais adotadas em sala de aula, os recursos computacionais passaram a ocupar lugar de destaque na busca por metodologias alternativas. Podemos mencionar, como uma das razões principais para isso, o fato de que esses instrumentos tecnológicos são utilizados no desenvolvimento de muitos conteúdos matemáticos, agindo como facilitadores na compreensão de conceitos, resoluções de exercícios, entre outras aplicações.

Conforme Calixto (2019), a informática no âmbito escolar é uma metodologia de apoio pedagógico na formação dos alunos e não deve ser caracterizada como um objeto segregador. De fato, o desenvolvimento tecnológico atual está presente em várias áreas e se faz indispensável na formação educacional e profissional de todos. A ausência de tais tecnologias está na direção contrária às novas tendências de ensino brasileiras e internacionais.

Em Tajra (2011), certifica-se que a maneira de utilização do computador deve variar em conformidade com o objetivo a ser alcançado dentro de um recinto educacional, e diversifica-se de acordo com o planejamento que está sendo empregado em cada caso e com a participação ativa do professor. Assim, a autonomia adquirida pelos alunos na experiência com softwares, o maior desenvolvimento criativo, bem como o favorecimento da socialização se tornam ocorrências habituais.

Portanto, a Informática aplicada na Educação Matemática é uma rica fonte de experiências e produções humanas, que amplia o diálogo entre tecnologia e a proposta pedagógica.

A aplicação da informática nos dá a oportunidade de "experimentação, visualização e de heurística dos humanos envolvidos nesse coletivo", principalmente no que se refere ao uso da geometria dinâmica.

> Em geometria dinâmica (GD), o dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação (BORBA et al., 2014, p. 23).

Utilizando softwares de GD é possível expandir a habilidade de visualização e interpretação de problemas relacionados à geometria, bem como relacionados a equações, funções e gráficos. Dessa forma o aluno pode manipular instrumentos didáticos fundamentados no objeto de estudo.

Em particular, construções geométricas e gráficas que exigem utilização de régua e compasso podem ser desempenhadas através das ferramentas dos softwares de GD, de maneira mais dinâmica.

> Geometria Dinâmica não se trata de uma nova geometria, trata-se da possibilidade de fazer construções eletrônicas como aquelas com régua e compasso e outras mais. Além disso, elementos básicos podem ser manipulados através do teclado ou mouse, deslocando-se na tela e trazendo atrelados a si os elementos construídos a partir deles, ou seja, não alterando a posição relativa entre eles. Nessa mudança automática de posição está o dinamismo, cuja grande vantagem é preservar as relações entre os elementos da figura (BRAVIANO, RODRIGUES, 2002, p. 22-23).

De maneira geral, os softwares de Geometria Dinâmica se apresentam como uma ferramenta construtiva estabelecendo harmonia entre o conceito e o objeto estudado.

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este

> se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (GRAVINA, 1996, p. 6).

Portanto, pode-se dizer que essas novas tecnologias facilitam o processo de ensino de matemática permitindo ampliar as possibilidades construtivas de pensamento.

Nessa perspectiva, tem-se o software GeoGebra[1]. Essa ferramenta tecnológica foi desenvolvida por Markus Hohenwarter em 2002, na Áustria, em sua dissertação de mestrado em Matemática Educacional e Ciência Computacional da Universidade de Salzburg. Distribuído livremente, o GeoGebra pode ser obtido na Internet[2], em versão atualizada, e em idioma Português (na verdade, em trinta e nove idiomas diferentes).

De acordo com Calixto (2019), as ferramentas do GeoGebra são bem aceitas no ensino de funções reais e geometria, se manifestando como forte instrumento para o ensino de muitos conteúdos de matemática de maneira dinâmica e interativa.

> O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma, que permite trabalhar a geometria de modo dinâmico com a abordagem de muitos conteúdos matemáticos, oportunizando fazer o seu uso em diversos níveis de ensino, pois combina geometria, álgebra, tabela, gráficos, e cálculo em um único sistema, possibilitando efetuar construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas como com funções que podem transformar-se dinamicamente. Ele propicia à abordagem de assuntos simples e, através de suas ferramentas, a possibilidade de abordagem de conteúdos mais complexos (CALIXTO, 2019, p. 19).

A aplicação do software GeoGebra se aproxima ao uso de lápis e papel sobre o que é aprendido em matemática além de oportunizar a "experimentação, visualização e de heurística dos humanos envolvidos nesse coletivo" (BORBA et al., 2014, p. 73).

São muitos os argumentos que justificam o uso de novas tecnologias na educação. Devido aos recursos dinâmicos, ferramentas interativas, gratuidade, suas aplicações em muitos conteúdos em matemática, pode-se dizer que o Geogebra se configura entre as principais ferramentas de geometria dinâmica, estruturando-se como uma relevante alternativa para a prática do ensino de matemática.

[1] www.geogebra.org/

[2] http://geogebra.org/cms/pt_br

3 Aspectos Históricos

Neste capítulo apresentamos alguns fatos históricos da equação do segundo grau e da função quadrática. Ambas foram estudadas por muitos séculos e civilizações sob várias perpectivas, como a geométrica, algébrica, ou mesmo por métodos de aproximações. Foram muitos os matemáticos que contribuíram para o conhecimento hoje consolidado. Dentre os vários nomes conhecidos, abordamos aqueles que desenvolveram métodos de resoluções mais próximos dos métodos ensinados atualmente. E, priorizando uma visão cronológica das descobertas, espera-se que essa escolha possa complementar aquela apresentada nos livros didáticos.

3.1 Al-Khowârizmî

Importante matemático persa, Mohamed ibn-Musa Al-Khowârizmî (780 D.C. - 850 DC), foi autor, além de outras obras, do livro *Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balah* (825 D.C).

> Nessa obra, Al-Khowârizmî apresenta a equação do 2° grau, bem como sua resolução, de forma retórica, além de uma comprovação geométrica denominada método de completar quadrados, método geométrico distinto do utilizado pelos gregos. Em muitos casos apresentava, tal como seus predecessores somente uma raiz (positiva). (FRAGOSO, 2000, p.22-23)

Além disso, é referenciado a este matemático a origem das palavras "álgebra",

> A origem de nossa palavra álgebra, a partir do título do tratado de Al-Khowârizmî sobre o assunto, *Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balah*, é muito interessante. Esse título foi traduzido literalmente como "ciência da reunião e da oposição" ou, mais livremente, como ciência da transposição e do cancelamento. O texto, que se preservou, tornou-se conhecido na Europa através de uma tradução latina e fez da palavra *al-jabr* ou álgebra sinônimo de ciência das equações. Obviamente desde a metade do século XIX o termo álgebra adquiriu um significado muito mais amplo (BOYER, 2004, p.266).

e "algoritmo"

> O livro de Al-Khowârizmî sobre o uso dos numerais hindus também introduziu uma palavra no vocabulário da matemática. Não há cópias do original desse livro, mas em 1857 descobriu-se uma tradução latina que começa por “Algoritmi disse...”. Nessa abertura o nome Al-Khowârizmî transformou-se em Algoritmi que, por sua vez, deu origem à palavra atual algoritmo que significa “arte de calcular de uma maneira particular” (BOYER, 2004, p.266).

Segundo Pedroso (2010), tendo como base a álgebra e a geométrica de Euclides, Al-Khowârizmî, estudou as raízes das equações do segundo grau, ainda que considera-se apenas as raízes positivas.

Abaixo temos as classificações das equações quadráticas dadas por Al-Khowârizmî, sendo que os coeficientes eram todos positivos:

- Tipo 1: Quadrados iguais às raízes $ax^2 = bx$;
- Tipo 2: Quadrados iguais a números $ax^2 = c$;
- Tipo 3: Raízes iguais a números $bx = c$;
- Tipo 4: Quadrados mais raízes iguais a números $ax^2 + bx = c$;
- Tipo 5: Quadrados mais números iguais a raízes $ax^2 + c = bx$;
- Tipo 6: Raízes mais números iguais a quadrados $bx + c = ax^2$.

A seguir é apresentado um exemplo de como o enunciado dos problemas propostos por Al-Khowârizmî:

> Considere um quadrado e dez raízes do mesmo equivalem a 39 denares, ou seja, qual deve ser o quadrado que, quando aumentado de dez vezes de suas raízes, é equivalente a trinta e nove? (CHAVES, 2018, p. 19)

Usando a notação atual, podemos reescrever o exemplo anterior do seguinte modo,

$$x^2 + 10x = 39. \tag{3.1}$$

Assim, vemos que a equação (3.1), segundo a classificação de Al-Khowârizmî, é do tipo 4. O método de solução proposto pelo matemático pode ser descrito da seguinte forma:

> Tome a metade do número de raízes, obtendo cinco. Isto é multiplicado por si mesmo, o produto será vinte e cinco. Adicione isto a trinta e nove, a soma é sessenta e quatro. Tome então a raiz quadrada disto, que é igual a oito, e subtraia desse valor a metade do número de raízes que é cinco. A diferença é três. Portanto esta é a raiz do quadrado procurado, e o próprio quadrado é nove. (FLÓES, 2013, p. 18).

No capítulo 5 detalharemos o método de completar quadrados utilizado por Al-Khowârizmî. Faremos uma construção com o auxílio de recursos computacionais (no GEOGEBRA).

3.2 Sridhara e Bhaskara

Os métodos para determinação das raízes de uma equação do segundo grau frequentemente são associados aos matemáticos hindus Sridhara (Séc. XI d.C.) e Bhaskara de Akarya (1114 - 1185). Entretanto, é impreciso a atribuição à Bhaskara a fórmula que expressa a solução da equação do segundo grau.

> A fórmula de resolução de equações de segundo grau, conhecida como "fórmula de Bhaskara" não pode ter sido conhecida por este matemático indiano, nem pelos árabes, apesar de ambos saberem resolver "equações" (de seus respectivos modos) (ROQUE, PITOMBEIRA, 2013, p. xiii)

O método consiste naquilo que hoje é chamado de completar quadrados, desta vez, utilizando recurso algébricos, e consiste nas etapas descritas a seguir.

Dada a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{3.2}$$

onde a deve ser diferente de zero.

1. Inicialmente é isolado o termo independente, ficando:

$$ax^2 + bx = -c, \tag{3.3}$$

2. Em seguida multiplicando a equação (3.3) por 4a obtendo a equação (3.4):

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac. \tag{3.4}$$

3. Adiciona-se b^2 à ambos os membros da equação (3.4):

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2. \tag{3.5}$$

4. Através deste método tem-se:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac, \tag{3.6}$$

   pois, $4a^2x^2 + 4abx + b^2$ é um trinômio quadrado perfeito.

   Sendo assim,

5. Note que o lado esquerdo da equação (3.6) é maior do que zero, logo, o seu lado direito também será, deste modo, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da equação (3.6), resulta que:

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}. \tag{3.7}$$

   Mais ainda, como, uma raiz quadrada pode ter dois resultados, a equação (3.7) ficará da seguinte forma:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}. \tag{3.8}$$

6. Finalmente, isolando a incógnita x, encontramos a solução da equação quadrática (3.2).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.9}$$

3.3 René Descartes

O francês René Descartes (1596 - 1650), em sua obra *O discurso do Método*, desenvolveu um método geométrico para a obtenção de raízes positivas das equações quadráticas do tipo

- $x^2 = bx + c^2$;
- $x^2 = c^2 - bx$;
- $x^2 = bx - c^2$,

sempre com b e c positivos. Descartes criou uma forma de resolução pela geometria para solucionar as equações quadráticas com valores positivos. Ainda, ressaltou a forma geométrica de resolução para determinar a notação de dimensão e designar o grau da equação, onde assim poderia remeter as respostas da mesma. Além disso, o matemático descreveu um processo geométrico para equação do segundo grau relacionando com as operações da geometria.

Segundo Pedroso (2010), o processo desenvolvido por Descarte consiste em:

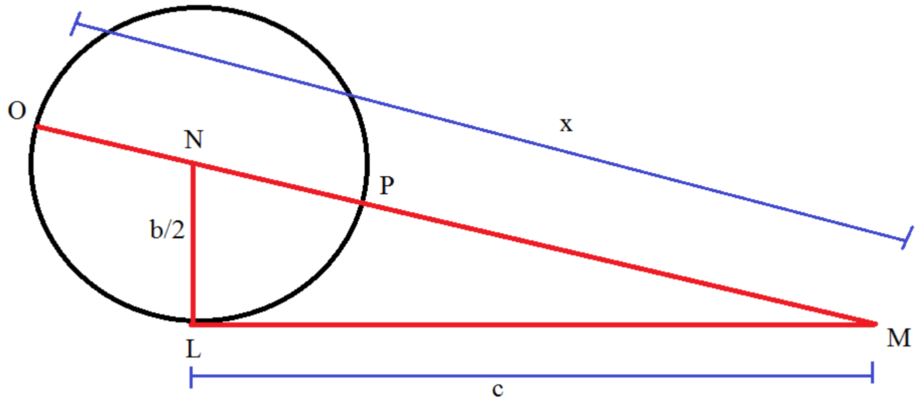

Figura 1: Esquema do processo desenvolvido por Descartes.
Fonte: Compilação do autor.

1. Inicialmente traçar um segmento LM, de comprimento c;
2. Traçar o segmento NL perpendicular a LM, de comprimento $b/2$;
3. Traçar a circunferência C com centro em N e raio $b/2$;
4. Em seguida, traçar a reta r que passa pelos pontos M e N;
5. Marcar os pontos P e O que são as interseções da circunferência C com a reta r.

   Assim, no triângulo MNK tem-se:

$$MN^2 = LM^2 + NL^2 \tag{3.10}$$

Além disso, seja, x = MO, então

$$x = MO = MN + NO = MN + b/2, \tag{3.11}$$

Ou seja,

$$MN = x - b/2. \tag{3.12}$$

Sendo,

$$NL = b/2. \tag{3.13}$$

De (3.10), (3.12) em (3.13) segue que

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 \tag{3.14}$$

$$x^2 - 2x\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 \tag{3.15}$$

$$x^2 - bx = c^2. \tag{3.16}$$

Assim, concluímos que $x = MO$ é a raiz da equação quadrática (3.16) encontrada.

Embora Descartes não considerava as raízes negativas, hoje é sabido que $-OM$ é a segunda raiz da equação (3.16).

3.4 François Viète

O francês François Viète (1540-1603) se destaca de seus predecessores por sistematizar o uso de letras, como variáveis, no estudo das equações algébricas e considerado como mais um inventor da álgebra moderna.

> A notação introduzida por Viète representou uma generalização dos métodos algébricos que permitiu classificar as equações tratadas anteriormente como "casos". Isto foi possibilitado pelo fato de podermos trabalhos no universo das equações, usando coeficientes (ROQUE, PITOMBEIRA, 2013)

Em seguida, apresentamos o desenvolvimento realizado por Viète para resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Considere a equação,

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0. \tag{3.17}$$

Realizando a substituição $x = u + v$, tem-se,

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0. \tag{3.18}$$

Logo,

$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0. \tag{3.19}$$

Agrupando os termos de u, obtém-se a equação (3.19)

$$au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0. \tag{3.20}$$

Em seguida, constrói-se uma equação incompleta de grau 2. Neste caso, põe-se a condição $2av + b = 0$, obtendo:

$$v = -\frac{b}{2a}. \tag{3.21}$$

Substituindo v na equação (3.20) temos

$$au^2 + \left[2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right]u + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0. \tag{3.22}$$

Então,

$$4a^2u^2 - b^2 + 4ac = 0. \tag{3.23}$$

De (3.23) conclui-se que

$$u^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{3.24}$$

Agora, considerando, $b^4 - 4ac > 0$, temos

$$u = \pm\frac{\sqrt{b^4 - 4ac}}{2a}. \tag{3.25}$$

Logo,

$$x = u + v = \left(-\frac{b}{2a}\right) \pm \frac{\sqrt{b^4 - 4ac}}{2a}. \tag{3.26}$$

e

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^4 - 4ac}}{2a}. \tag{3.27}$$

Portanto, Viète obteve a expressão popularmente conhecida por “Fórmula de Bháskara”.

3.5 Sir John Lieslie

Segundo Fragoso (2000), o matemático inglês Sir John Lieslie apresentou em sua obra *Elements os Geometry*, um procedimento para obter a raiz de equações quadráticas do tipo

$$x^2 - bx = -c. \tag{3.28}$$

A construção é realizada no plano cartesiano de uma circunferência que contém os pontos $A(0,1)$ e $B(b,c)$ e diâmetro AB, como na figura . Então, podemos identificar as seguintes

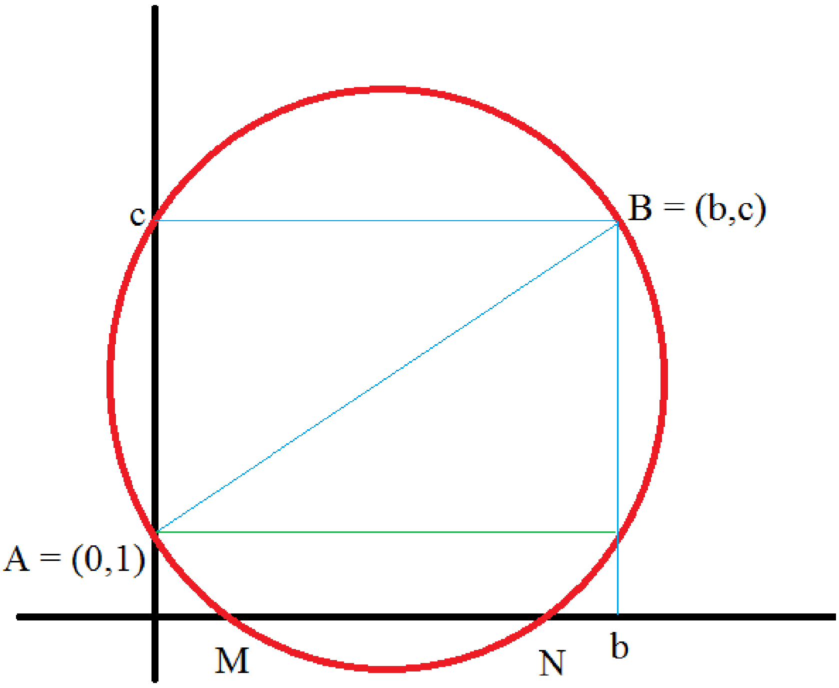

Figura 2: Dedução do método de Lieslie.
Fonte: Compilação do autor.

informações:

- O centro desta circunferência será o ponto:

$$P\left(\frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right) \tag{3.29}$$

De fato, pois o centro da circunferência coincide com o centro do retângulo formado pelos pontos $(0,1), (0,c), (b,c)$ e $(b,1)$.

- Além disso, o raio da circunferência será:

$$r = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2}. \tag{3.30}$$

Como a equação de uma circunferência de raio r centrada no ponto $P(x_0, y_0)$ é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{3.31}$$

Substituindo (3.29) e (3.30) em (3.31), tem-se

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2. \tag{3.32}$$

Note que, quando $y = 0$, tem-se

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 \tag{3.33}$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2} - 1\right)^2 \tag{3.34}$$

$$x^2 - 2x\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{c+1}{2}\right) + 1 \tag{3.35}$$

$$\Rightarrow x^2 - xb = -c \tag{3.36}$$

Portanto, as abcissas dos pontos $M(m, 0)$ e $N(n, 0)$ que estão na circunferência são as raízes da equação quadrática (3.28).

4 Ambiente de programação do GEOGEBRA

Apresentamos neste capítulo um tutorial básico sobre o software GEOGEBRA. Focaremos na apresentação e descrição de algumas ferramentas necessárias para construir gráficos, determinar raízes e encontrar os vértices de uma função quadrática.

A página inicial do Geogebra possui comandos na forma de botões.Destaca-se na figura 3 quatro itens importantes.

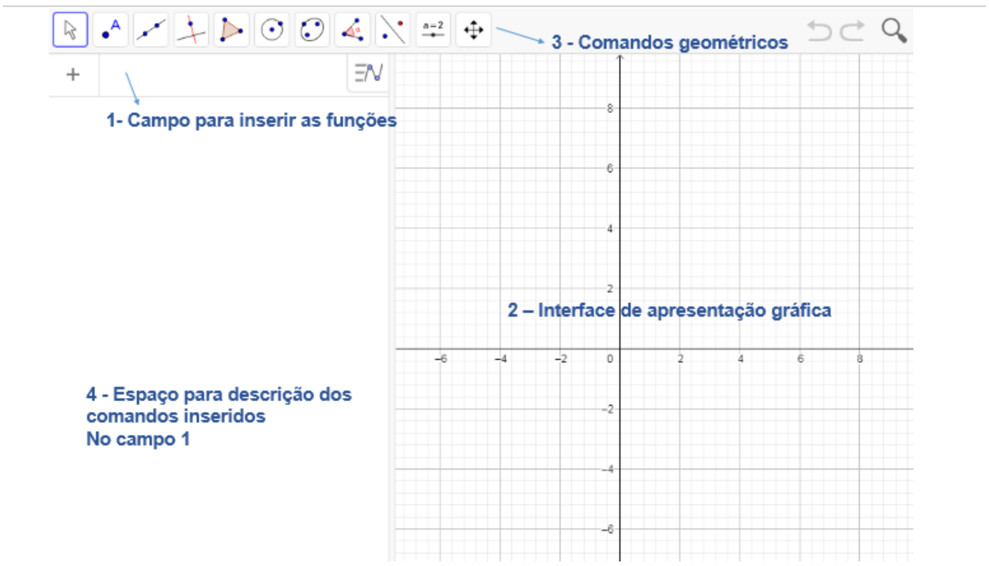

Figura 3: Interface do GEOGEBRA

Fonte: GEOGEBRA, 2021

O item 1 representa o local que deve ser inserido a lei de formação da função a ser estudada. No item 2 temos a interface gráfica onde é gerada a representação geométrica das curvas associadas a cada função. Retas, parábolas, hipérboles, solenoides, etc. Como estamos estudando função quadráticas, o gráfico será uma parábola. No item 3 tem-se os comandos geométricos utilizados para a interação dinâmica com a curva, tracejar segmentos de retas, calcular a distância entre dois pontos, elaborar círculos, triângulos, etc. Por fim, no item 4 tem-se o espaço para descrição das funções inseridas no campo um, onde a partir do conteúdo apresentado pode-se fazer comentários, descrições técnicas e organização dos dados estudados.

A figura 4 representa um grupo de ferramentas utilizadas como comando de entrada para realizar diversas operações algébricas e geométricas.

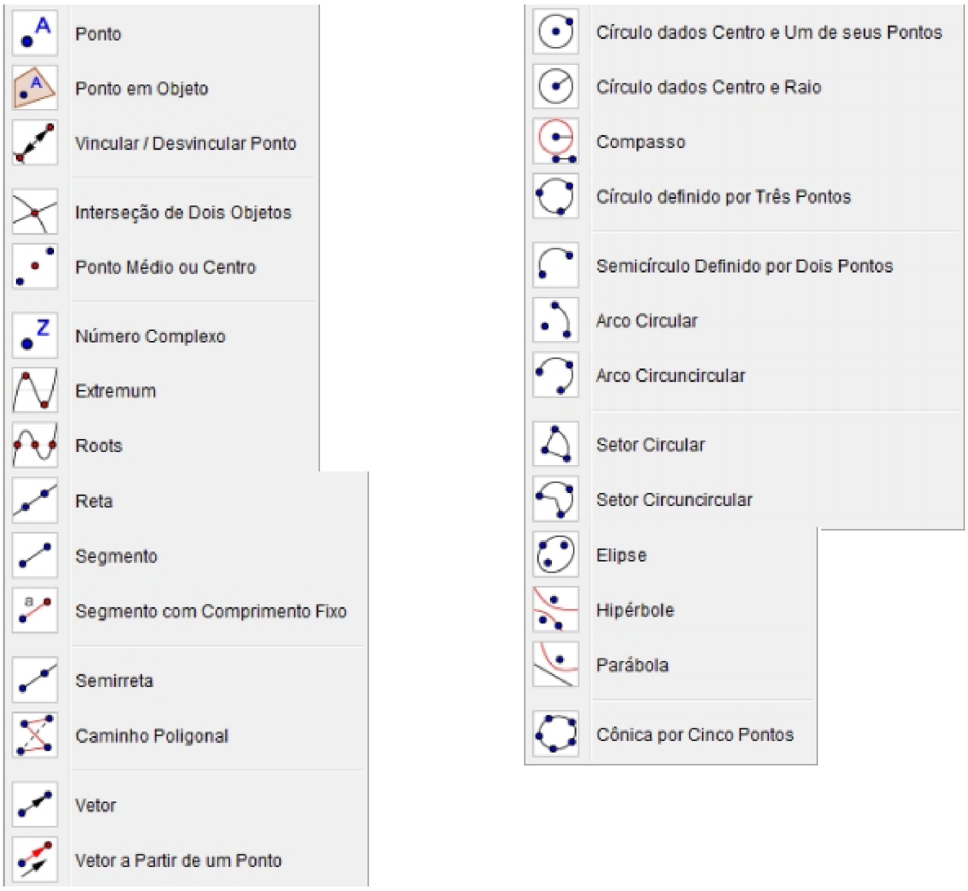

Figura 4: Comandos algébricos e geométricos no GEOGEBRA.
Fonte: GEOGPET-Tele UFF.

Todos as descrições de comandos apresentadas abaixo, foram retiras do tutorial do GeoGebra, elaborado pelo grupo de pesquisadores da Universidade Federal Fluminense (UFF) que pode ser baixado no site do Programa de Educação Tutorial da UFF: https://telecom.uff.br/pet/petws/.

- **Ponto:** cria um ponto na janela de visualização. Para isso, basta selecionar a posição desejada na janela. Existem três tipos de pontos no GeoGebra: um livre, de cor azul por padrão, que pode ser movimentado ao longo de toda janela, um móvel com restrição, de cor azul claro por padrão, que ocorre quando um ponto é inserido em algum objeto, como uma reta ou circunferência. Esse ponto pode ser movimentado, sem sair do objeto em que foi inserido. E, por último, há o ponto xo, de cor preta por padrão, que ocorre quando sua posição é uma interseção entre objetos, como um ponto de tangência.

- **Ponto em Objeto:** faz justamente o que a opção ponto não faz quando se trata de uma região dentro do perímetro que a determina, permitindo sempre que o ponto se vincule ao objeto que está na posição onde será inserido.

- **Vincular/Desvincular Ponto:** vincula um ponto livre a um objeto próximo, ou desvincula um ponto móvel com restrição ou xo. Para isso basta selecionar o ponto e, caso queira vincular, o objeto em questão.

- **Interseção de Dois Objetos:** cria um ponto xo que pertence aos dois objetos ao mesmo tempo. Nos casos em que a interseção é um conjunto que contém mais de um ponto, apenas um ponto será criado. Para utilizar essa ferramenta, basta selecioná-la e, em seguida, selecionar os dois objetos que serão utilizados.

- **Ponto Médio ou Centro:** basta selecionar os dois pontos que darão origem ao novo objeto, cuja característica principal será ter a mesma distância entre os dois pontos escolhidos.

- **Número Complexo:** cria um ponto com coordenadas (x, y), mas que representa o ponto Z, cuja expressão é: $z = x + yi$, sendo $i2$ igual a $(\sqrt{-1})2$. Para utilizá-la, basta selecionar as coordenadas do ponto desejado na Janela de Visualização.

- **Extremum, ou Otimização:** exibe todos os extremos locais de uma junção já determinada, basta selecionar a ferramenta e depois a função que deseja utilizar para conhecer seus extremos locais.

- **Roots, ou Raízes:** funciona seguindo a mesma lógica da ferramenta Extremum, porém exibe as raízes da função escolhida.

- **Reta:** depende de dois pontos. Basta criar ou selecionar os dois pontos por onde a reta passará.

- **Segmento:** utiliza o mesmo processo da opção Reta, selecionar os dois pontos que determinarão o segmento.

- **Segmento com Comprimento Fixo:** é criado ao selecionar ou criar um ponto livre que dará origem ao segmento, e seu comprimento. A partir disso, será criado um segundo ponto, móvel com restrição, para determinar o segmento.

- **Semirreta:** poderá ser criada a partir de dois pontos já estabelecidos ou não. O primeiro indicará a origem da semirreta, enquanto o segundo funcionará como sinal do vetor direção da mesma.

- **Caminho Poligonal:** é o percurso ao longo dos lados de um polígono que liga um ponto tomado como inicial, até o último ponto que, sendo ligado ao primeiro, gera o polígono em questão. Para gerar tal caminho é necessário selecionar ou criar os vértices do polígono, que, a partir do segundo, vão ligando-se automaticamente ao anterior. A ferramenta difere de um perímetro por desconsiderar sempre um dos lados do polígono.

- **Vetor:** é um segmento de reta orientado com inúmeras propriedades. Para cria-lo, basta selecionar ou criar o ponto de origem e, em seguida, sua outra extremidade.

- **Vetor a Partir de um Ponto:** gera um novo vetor com as mesmas propriedades de um já criado, mas com a origem em outro ponto. Isso é feito ao selecionar o vetor que deseja-se copiar e o ponto que será utilizado como origem do novo vetor.

- **Reta Perpendicular:** ao selecionar ou criar um ponto e, em seguida, escolher uma reta ou vetor já criado, a ferramenta gera uma nova reta perpendicular à escolhida, e que passa pelo ponto desejado.

- **Reta Paralela:** da mesma forma que funciona a Reta Perpendicular, essa ferramenta gera uma reta paralela à desejada, passando pelo ponto escolhido ou criado.

- **Mediatriz:** cria uma reta perpendicular ao segmento que liga dois pontos escolhidos, passando pelo seu ponto médio.

- **Bissetriz:** esse tipo de reta é o lugar geométrico de pontos com uma característica em comum. Sejam duas retas A e B, não coincidentes (ocupam lugares diferentes no espaço). Ao conjunto de pontos que possuem uma distância igual a ambas as retas damos o nome de Bissetriz. Para utilizar essa ferramenta basta selecionar as duas retas iniciais, ou três pontos, sendo o primeiro pertencente à primeira reta, o terceiro à segunda, e o segundo ponto como interseção delas. Para casos em que as retas são paralelas, não será possível escolher três pontos.

- **Reta Tangente:** define uma reta tangente a uma função, cônica ou círculo desejado. Ela depende de um ponto escolhido. Quando esse ponto pertence ao objeto desejado, a reta gerada será tangente à curva naquele ponto. Quando isso não ocorrer, será gerada, dependendo da possibilidade, uma reta tangente à curva que passe por aquele ponto, ou por um ponto contido na curva cuja coordenada x seja igual a do ponto selecionado. Quando existir mais de uma possibilidade de reta, a ferramenta gerará todas elas.

- **Reta Polar ou Diametral:** utilizada ao selecionar uma cônica, ou círculo, e um ponto qualquer. Ao considerarmos o ponto utilizado como A e o raio da circunferência, ou a distância focal da cônica como R, com origem em O, a ferramenta criará uma reta.

- **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos:** para utilizar essa ferramenta basta selecionar primeiro ponto referente ao centro do círculo e, em seguida, um dos pontos que fará parte da figura (para determinar o raio).

- **Círculo dados Centro e Raio:** para utilizar essa ferramenta é necessário selecionar o ponto referente ao centro do círculo e, em seguida, determinar um valor para o seu raio.

- **Compasso:** utiliza a distância entre dois pontos para que a mesma seja o raio de um novo círculo a ser determinado. Para utilizá-la basta selecionar os dois pontos e, em seguida, o ponto que será o centro do novo círculo.

- **Círculo definido por Três Pontos:** para utilizar essa ferramenta só é necessário selecionar os três pontos que determinarão o novo círculo. Caso eles sejam colineares (contidos na mesma reta), será criada uma reta, representando parte de um círculo de dimensões infinitas.

- **Semicírculo Definido Por Dois Pontos:** cria um semicírculo, a metade de um círculo cujo diâmetro é a distância entre os dois pontos selecionados. A partir da seleção do primeiro ponto, a figura vai seguir uma orientação horária, e será desenhada até o segundo ponto.

- **Arco Circular:** utiliza três pontos para criar um arco. O primeiro ponto determinará o centro do arco que será criado. O segundo dará início ao mesmo, enquanto que o terceiro representará o final, e o arco será criado indo do primeiro ponto ao segundo no sentido anti-horário.

- **Arco Circuncircular:** utiliza três pontos para criar um arco. O primeiro ponto determinará o início do arco que será criado.

- **Setor Circular:** utiliza três pontos para criar um setor circular. O primeiro ponto determinará o centro do setor que será criado. O segundo dará início ao mesmo, enquanto que o terceiro representará a direção do segmento que vai do centro até o ponto final, e o setor será criado indo do segundo ponto ao segmento gerado pelo terceiro no sentido anti-horário.

- **Setor Circuncircular:** utiliza três pontos para criar um setor circuncircular. Os primeiros dois pontos estarão contidos no círculo que dá origem ao setor desejado, sendo o primeiro ponto o início do objeto. O último ponto determinará o final do setor, e a figura será construída indo do primeiro ao terceiro ponto no sentido horário.

- **Elipse:** gera uma elipse a partir de três pontos, sendo os dois primeiros seus focos, e o terceiro um ponto contido na mesma.

- **Hipérbole:** gera uma hipérbole a partir de três pontos, sendo os dois primeiros seus focos, e o terceiro um ponto contido na mesma.

- **Parábola:** gera uma parábola a partir da seleção de seu foco e, em seguida, da reta diretriz.

- **Cônica por Cinco Pontos:** como uma cônica pode ser deduzida a partir de cinco pontos contidos nela, essa ferramenta utiliza-se desse conceito para gerar uma cônica, basta selecionar os cinco pontos desejados.

5 Geogebra como ferramenta auxiliar no ensino de funções quadráticas

No Capítulo 2 apresentamos um referencial teórico que fundamenta o uso de softwares no ensino. Neste capítulo, utilizaremos o GeoGebra como ferramenta auxiliar, paralelamente ao desenvolvimento teórico

5.1 Raízes de uma equação polinomial do segundo grau

No que segue, apresentamos uma demonstração da fórmula para determinação das raízes de uma equação do segundo grau.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{5.1}$$

onde $a \neq 0$, é chamada *função quadrática* ou *função polinomial do segundo grau.*

Observe que

$$\begin{align}
f(x) &= ax^2 + bx + c \tag{5.2}\\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \tag{5.3}\\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \tag{5.4}\\
&= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]. \tag{5.5}
\end{align}$$

Portanto,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]. \tag{5.6}$$

A expressão dada em (5.6) é chamada *forma canônica* da função quadrática.
O *discriminante* de uma função quadrática é dado por

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{5.7}$$

Assim, podemos reescrever a forma canônica como

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]. \tag{5.8}$$

Por definição, as raízes da função f são os pontos $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação $f(x) = 0$. Lembrando que $a \neq 0$, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \tag{5.9}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) \tag{5.10}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \tag{5.11}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{5.12}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{5.13}$$

Logo, a função quadrática terá raízes reais se, e somente se, $\Delta \geq 0$. Em particular, se $\Delta = 0$, temos $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

A seguir, exploramos uma clássica abordagem geométrica, utilizando o método de completar quadrados realizado pelo matemático Al-Khowârizmî, conforme mencionado no Capítulo 3 que conta um pouco de sua história e algumas de suas descobertas.

Cada passo da construção será descrito, acompanhado de uma figura realizada com auxílio do GEOGEBRA. Iniciamos construindo um quadrado de lado x. Em seguida, construímos dois retângulos iguais de lados x e $\frac{b}{2a}$. A dinâmica do software permite manipular e juntar esses dois retângulos ao quadrado de lado x conforme a figura (5) dada a seguir.

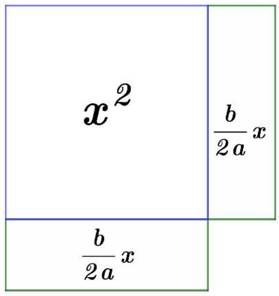

Figura 5: Quadrado com lado medindo x e dois retângulos com lados x e $\frac{b}{2a}$.

Fonte: Compilação do autor.

Note que a área do quadrado é x^2 e a área de cada retângulo é $\frac{b}{2a}x$. Logo, a área total da região construída (Figura 5) é dada por $x^2 + 2\frac{b}{2a}x = x^2 + \frac{b}{a}x$. Agora, construímos um novo quadrado que possa se encaixar perfeitamente nessa região a fim de **completarmos um quadrado** (confira a figura (8)). Assim, o lado desse quadrado deve necessariamente medir $\frac{b}{2a}$ e área medindo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Portanto, a área total do quadrado formado é a soma de todas as figuras construídas. Ou seja, $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{2a}\right)$.

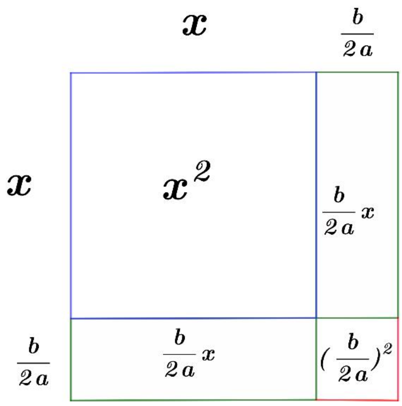

Figura 6: Completando o quadrado

Fonte: Compilação do autor.

Observe ainda que formamos um quadrado de lado $x + \frac{b}{2a}$. Logo, o quadrado construído possui área igual a $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Assim, para completar o quadrado na equação $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

adicionamos em ambos os lados da equação o valor $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ (geometricamente, o quadrado de lado $\frac{b}{2a}$). Consequentemente,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{5.14}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{5.15}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} \tag{5.16}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5.17}$$

5.2 Construção de gráficos

Após determinar uma expressão que representa as raízes (quando existem) de uma equação polinomial do segundo grau, apresentaremos o objeto geométrico intrinsicamente associado a essa equação.

Considere, no plano, um ponto F e uma reta D tal que $F \notin D$, ou seja, uma reta que não contenha o ponto F. A parábola de *foco* F e *reta diretriz* D é o conjunto dos pontos P do plano que distam igualmente de F e da reta D. O ponto da parábola mais próximo da reta diretriz D chama-se *vértice da parábola*. Veja a figura (7).

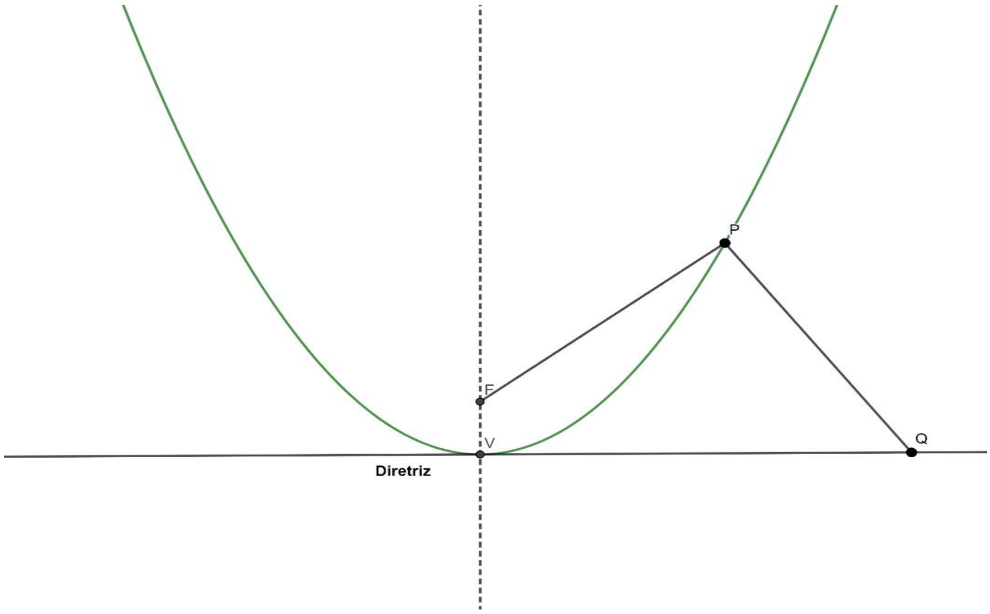

Figura 7: Parábola de foco F e vértice V.

Fonte: GEOGEBRA 2021.

Dizemos que a *concavidade da parábola está voltada para cima* se o coeficiente a é estritamente positivo ($a > 0$). Dizemos que a *concavidade da parábola está voltada para baixo* se o coeficiente a é estritamente negativo ($a < 0$).

Na figura (8) temos a representação de duas parábolas com concavidades distintas. A parábola representada na cor verde possui concavidade voltada para cima, enquanto a parábola representada na cor roxa possui concavidade voltada para baixo.

Figura 8: Gráfico de duas parábolas com concavidades distintas.
Fonte: GEOGEBRA 2021.

Demonstração das coordenadas do vértice da parábola:

Considere uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em sua forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right].$$

Se $a > 0$ a concavidade da parábola estará voltada para cima e a função assumirá um valor mínimo. Neste caso, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, e $\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ é constante. Em particular, $f(x)$ assume o valor mínimo quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0, \tag{5.18}$$

ou seja,

$$x_v = -\frac{b}{2a}. \tag{5.19}$$

Se $a < 0$ a concavidade da parábola estará voltada para baixo e a função terá valor de máximo. Portanto,

$$x_v = -\frac{b}{2a}. \tag{5.20}$$

Logo,

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + -\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right] \tag{5.21}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left[-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right] \tag{5.22}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{5.23}$$

Considerando $f(x_v) = y_v$ e $\Delta = b^2 - 4ac$ temos

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}. \tag{5.24}$$

Na interface do software GeoGebra, é possível modificar os valores dos coeficientes a, b e c da função quadrática, de forma a obter uma interação dinâmica no comportamento do gráfico. A título de ilustração, apresentamos a seguir algumas imagens de programações possíveis no Geogebra.

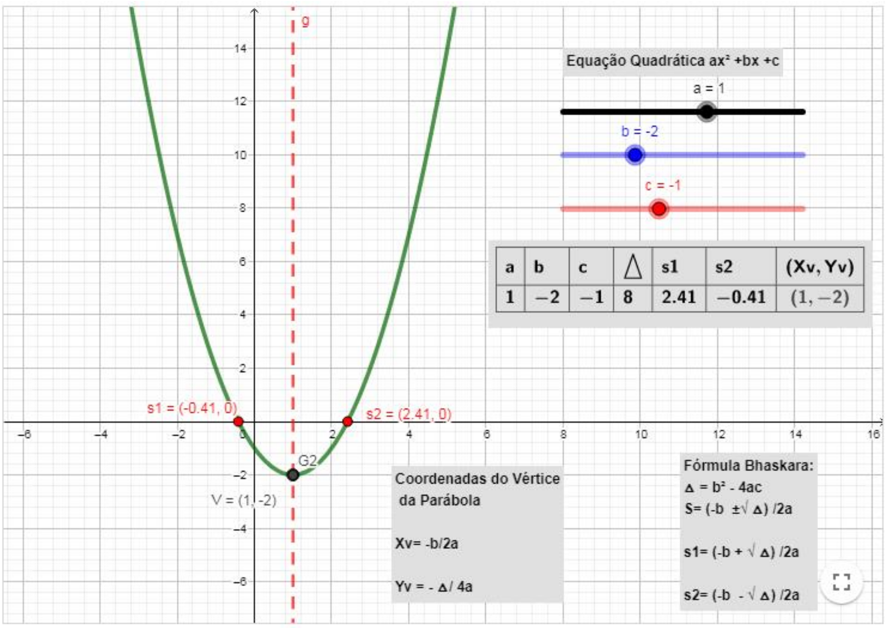

Figura 9: Equação e função quadráticas

Fonte: GEOGEBRA 2021.

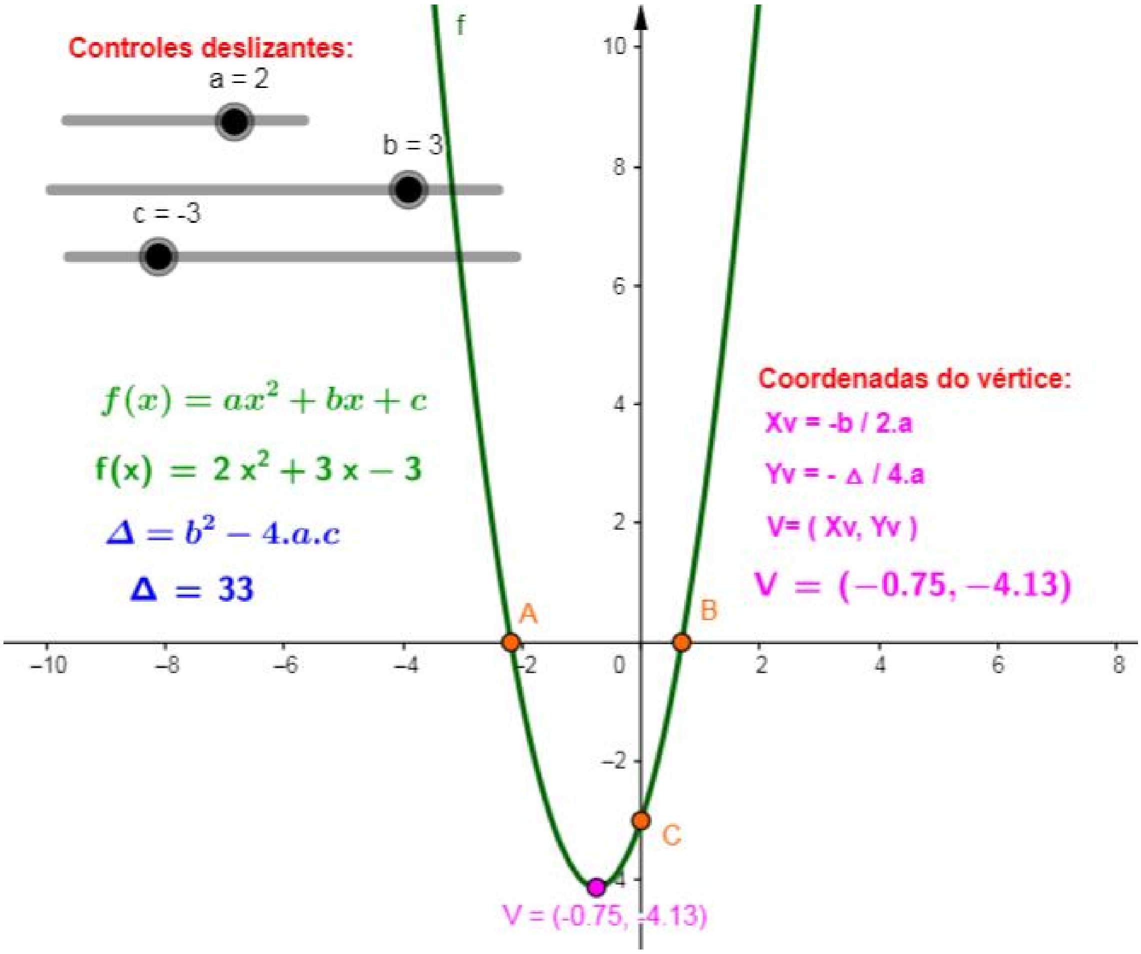

Figura 10: Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Fonte: GEOGEBRA 2021.

5.3 Proposta de atividades

Nesta seção elaboramos algumas atividades para o ensino da função quadrática com o auxílio do software GeoGebra.

Construa os gráficos das funções quadráticas abaixo em um mesmo plano no GeoGebra. Além disso, para a letra "a" apresenta-se os valores calculados para "y".

Neste caso os resultados de "y" apresenta-se na tabela (1).

x	$y = x^2 - 3x + 2$
-2	$y = (-2)^2 - 3(-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12$
-1	$y = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$
0	$y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$
1	$y = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$
2	$y = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$

Tabela 1: Cálculo da imagem da função $y = x^2 - 3x + 2$ para alguns pontos dados.

Para todas as funções abaixo é utilizado o modelo da tabela (1) para obter o valor de "y". Além disso, será utilizado o software GeoGebra com intuito de representar essas funções, obter as raízes e gerar um gráfico demonstrando a curva característica da função quadrática.

x	$y = -3x^2 - 7x + 6$
-2	$y = -3 \cdot (-2)^2 - 7(-2) + 6 = -12 + 14 + 6 = 8$
-1	$y = -3 \cdot (-1)^2 - 7(-1) + 6 = -3 + 7 + 6 = 10$
0	$y = -3 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 6 = 0 - 0 + 2 = 6$
1	$y = -3 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = -3 - 7 + 6 = -4$
2	$y = -3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 = -12 - 14 + 6 = -20$

Tabela 2: Cálculo da imagem da função $y = -3x^2 - 7x + 6$ para alguns pontos dados.

x	$y = x^2 - 4x$
-2	$y = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$
-1	$y = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$
0	$y = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 04$
1	$y = 1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$
2	$y = -2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

Tabela 4: Cálculo da imagem da função $y = y = x^2 - 4x$ para alguns pontos dados.

x	$y = -x^2 + 3x + 4$
-2	$y = -(-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 4 = -4 - 6 + 4 = -6$
-1	$y = -(-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 4 = -1 - 3 + 4 = 0$
0	$y = -^2 + 3 \cdot 0 - 4 = 0 - 0 + 4 = 4$
1	$y = -^2 + 3 \cdot 1 - 4 = -1 + 3 + 4 = 6$
2	$y = -^2 + 3 \cdot 2 - 4 = -4 + 6 + 4 = 6$

Tabela 3: Cálculo da imagem da função $y = -x^2 + 3x + 4$ para alguns pontos dados.

Com base nas tabelas acima e, utilizando o software GeoGebra, obtém-se os gráficos associados a cada função dada. Primeiramente será apresentado o comando no software para inserir a regra de cada função (veja figura (11)).

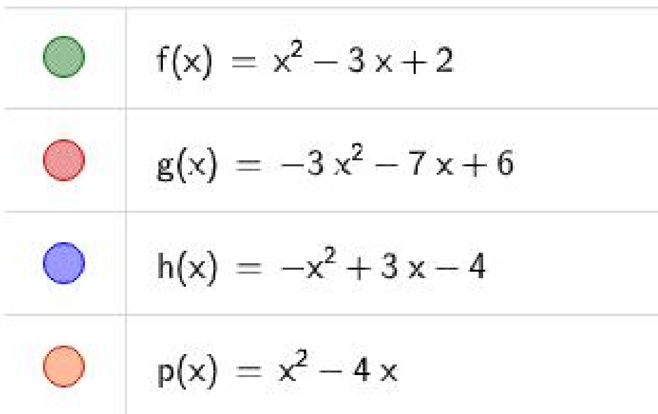

Figura 11: Comando para inserção das funções no software.
Fonte: GEOGEBRA, 2021

Como podemos observar, a figura (11) cada função ficou registrada com cores diferentes. Após as funções terem sido inseridas, o programa imprime na tela o gráfico de cada uma e, como estamos trabalhando com equação do segundo grau a geometria para cada função será uma parábola.

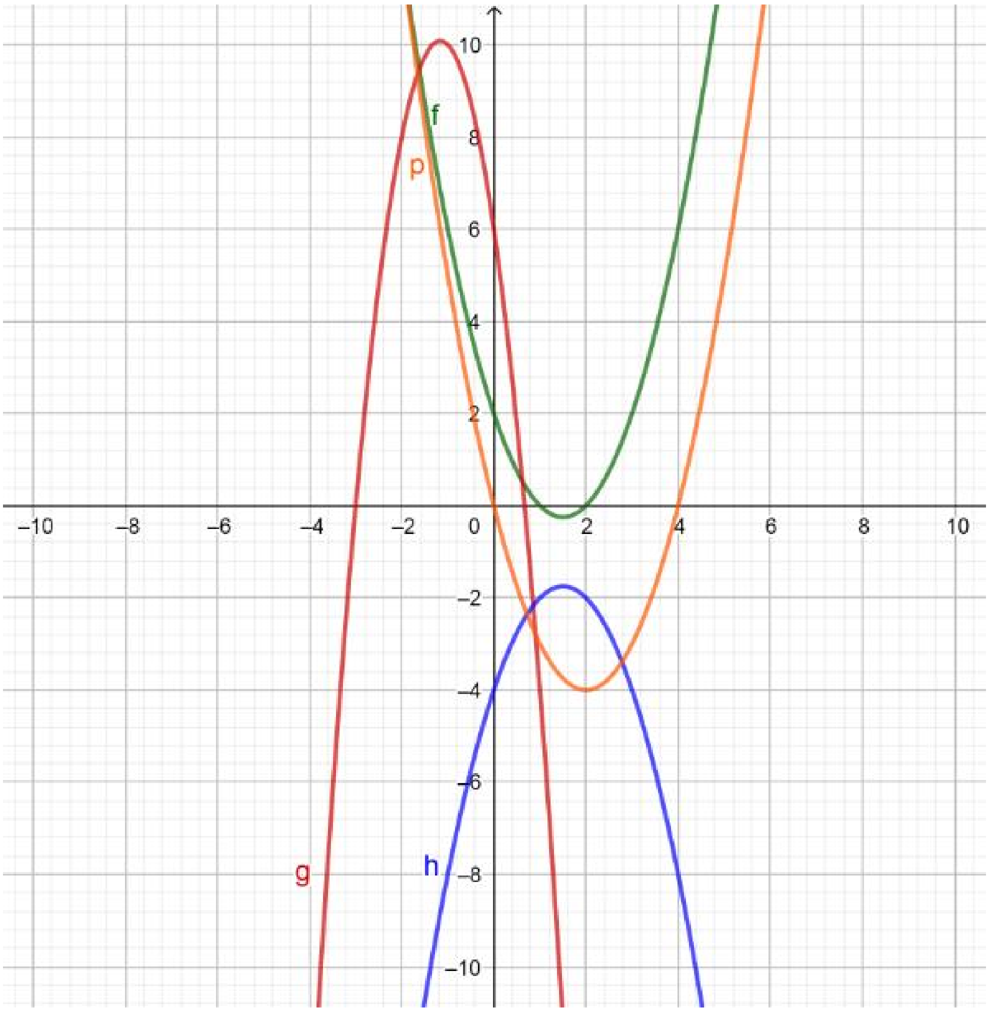

Figura 12: Características das curvas para cada função inserida no software GeoGebra.
Fonte: GEOGEBRA, 2021

Analisando a figura (12), percebemos as diferenças obtidas na geometria de cada parábola, com concavidade voltada para cima e para baixo.

Agora, abordaremos alguns casso específicos, a partir das parábolas geradas.

- Identifique, em cada caso, se o valor do coeficiente a é positivo ou negativo;

  Com base na figura (12), é possível identificar que duas funções possuem valores positivos para o coeficiente a. De fato, são as funções $f(x)$ e $p(x)$.

  E, para valores negativos do coeficiente a, tem-se as duas funções $g(x)$ e $h(x)$.

- Como é a concavidade do gráfico nas funções que possuem o valor de a positivo? E a negativo?

Para as funções em que o coeficiente a é positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima.

E, as funções que possuem valores do coeficiente a negativo, apresentam a concavidade voltada para baixo.

Essa representação fica mais fácil de entender analisando a figura (8).

- O que podemos concluir em relação ao sinal do valor de a e a concavidade da parábola?

  Conclui-se que, a orientação da parábola está relacionada com o valor de coeficiente "a". Ou seja, se $a > 0$, obtém-se uma parábola com concavidade voltada para cima. Se o coeficiente $a < 0$ tem-se uma parábola com concavidade voltada para baixo.

- Escreva o par ordenado onde cada gráfico intersecta o eixo y.

  Considerando as funções cujo valor de a é positivo, encontrar os pontos que interceptam o eixo y.

  Identificamos que o gráfico de $p(x)$ (parábola laranja) intersecta o eixo y quando $x = 0$. E, o gráfico de $f(x)$ (parábola verde) intersecta o eixo y quando $x = 2$.

  Analogamente, analisamos as funções com valores negativos para o coeficiente a. O gráfico de $g(x)$ (parábola vermelha) intersecta o eixo y quando $x = 6$. E, o gráfico de $h(x)$ intersecta o eixo y quando $x = -4$.

- Calcule o valor do discriminante da função (representado por Δ) no GeoGebra e em seguida identifique o valor de a.

  Para calcular o discriminante da função no GeoGebra, insira os valores de a, b e c no campo de entrada.

  Em seguida digite a fórmula: $\Delta = b^2 - 4ac$.

  1. Qual a função tem $\Delta > 0$? Escreva quais valores de x tornam essa função positiva, negativa e onde ela se anula;
  2. Qual função tem $\Delta = 0$? Escreva quais valores de x tornam essa função positiva, negativa e onde ela se anula;
  3. Qual função tem $\Delta < 0$? Escreva quais valores de x tornam essa função positiva, negativa e onde ela se anula.

  Com base no método questionado acima, as funções $f(x)$, $g(x)$ e $p(x)$ apresentam discriminante maior do que zero. E, a função $h(x)$ resulta em um delta menor do que zero.

- Quais os vértices das funções que tem concavidade voltada para cima?

  Apresenta-se as relações para determinar o valor do vértice para x e y.

  Neste caso

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{5.25}$$

  e

$$y = -\frac{\Delta}{4a}. \tag{5.26}$$

  Aplica-se as relações do vértice para encontrar x_v e y_v.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}.$$

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{4}.$$

  Portanto, os vértice de x e y para função $f(x)$ são, respectivamente, $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{4}$.

  De modo semelhante, aplica-se a relação acima para determinar os vértices para função $p(x)$, cuja concavidade está voltada para cima.

$$p(x) = x^2 - 4x, \tag{5.27}$$

  onde, $a = 1$, $b = -4$ e $\Delta = 16$.

  Aplicando as relações, obtém-se:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4 \cdot 1} = -\frac{16}{4} = -4.$$

  Portanto, os vértice de x e y para função $p(x)$ são, respectivamente, 2 e -4.

  Na figura (13) a seguir, evidencia-se os gráficos das funções $f(x)$ e $p(x)$ destando-se os valores dos vértices.

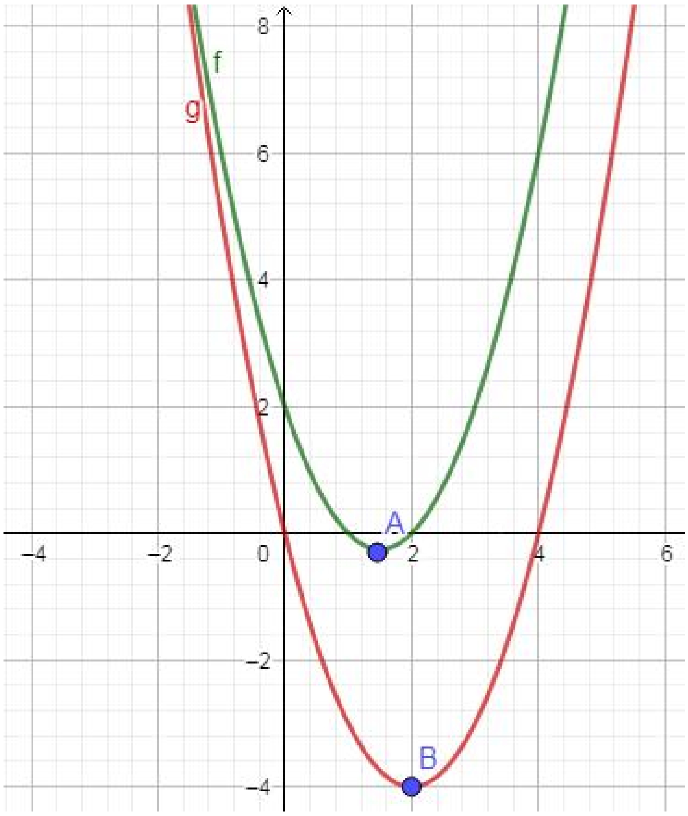

Figura 13: Representação dos vértices das funções $f(x)$ e $p(x)$.
Fonte: GEOGEBRA, 2021

- Quais os vértices das funções que têm a concavidade voltada para baixo, ou seja, quando o a é negativo?

  Com base na figura (12), nota-se que as funções $g(x)$ e $h(x)$ possuem concavidade voltada para baixo. Então, para determinar os vértices dessas funções aplica-se os procedimentos análogos aos realizados no tópico anterior para as funções com concavidade voltada para cima.

  As funções são:

$$g(x) = -3x^2 - 7x + 6; \tag{5.28}$$

$$h(x) = -x^2 + 3x?4. \tag{5.29}$$

  Extraindo os coeficientes: $a = -3$, $b = -7$ e $\Delta = 121$ da função $g(x)$ e aplicando nas relação para determinar os vértices.

  Temos:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2 \cdot (-3)} = -\frac{7}{6}.$$

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{121}{4 \cdot (-3)} = \frac{121}{12}.$$

Agora, repete-se o mesmo procedimento para função $h(x)$, onde os coeficientes são: $a = -1$, $b = 3$, $c = -4$ e $\Delta = -7$. Observe que o valor de delta é negativo. Desde que não pode haver raiz negativa, isso explica o fato do gráfico da função $h(x)$ não intercectar o eixo x (veja figura (14)). Além disso,

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot (-1)} = \frac{3}{2}.$$

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-7}{4 \cdot (-1)} = -\frac{7}{4}.$$

Conhecidos os coeficientes das funções $g(x)$ e $h(x)$, apresenta-se na figura (13) os pontos dos vértices em relação a curva parabólica de cada função.

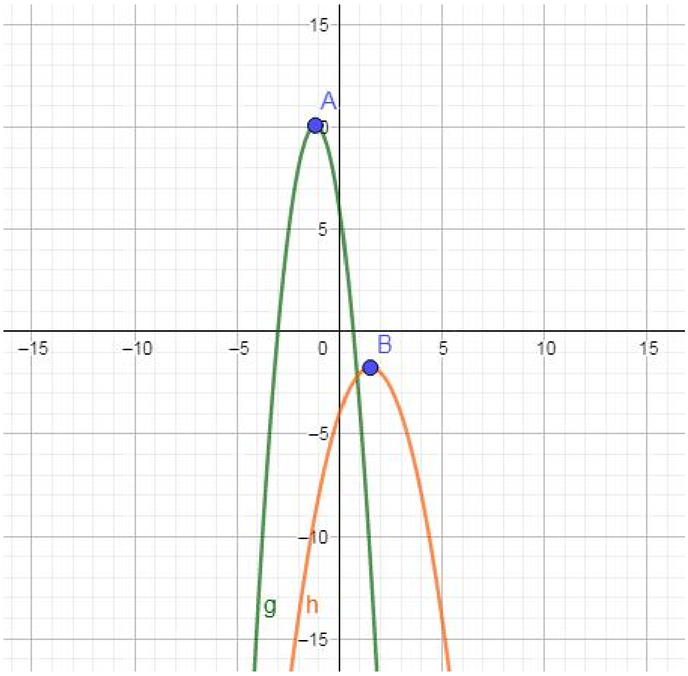

Figura 14: Representação dos vértices x e y, das funções $g(x)$ e $h(x)$.
Fonte: GEOGEBRA, 2021

- O ponto de máximo do gráfico em relação a função $g(x)$ e $h(x)$

  O ponto de máximo ocorre quando o coeficiente a é menor do que zero, ou seja negativo.

  Nessa análise aconteceu para as funções $g(x)$ e $h(x)$.

- O ponto de mínimo no gráfico em relação as funções $f(x)$ e $p(x)$.

  Já, o ponto de mínimo ocorre quando o coeficiente a é positivo, maior do que zero, e uma concavidade voltada para cima. Vê-se essa condição nas funções $f(x)$ e $p(x)$.

6 Considerações Finais

Este estudo teve como finalidade demonstrar os métodos de resolução a fim de encontrar (quando existirem) as raízes de uma equação do segundo grau e estudar o gráfico da função quadrática, utilizando o software GeoGebra para determinar as variáveis desse processo, propondo um método didático alternativo de ensino.

A pesquisa se iniciou apresentando argumentação teórica para realização da abordagem didática utilizada, os métodos de resoluções de uma equação do segundo grau, bem como soluções numéricas. Obteve-se, de forma detalhada, as raízes, os vértices e os gráficos da função em estudo.

A abordagem foi realizada com recursos computacionais. O modelo proposto para resolução de equações do segundo grau utilizando o software GeoGebra, apresenta vantagens significativas, facilitando o ensino a partir de uma didática metodológica alternativa acompanhada de exemplos.

Recomenda-se a utilização das atividades propostas neste trabalho, tanto no que tange a abordagem histórica quanto a utilização do software Geogebra no ensino de equações e funções quadráticas. É preciso salientar que as atividades apresentadas podem ser adaptadas e desenvolvidas de acordo com a realidade do aluno e o seu cotidiano.

Estudos futuros podem ser explorados em duas frentes distintas. A primeira, é a verificação prática do aprendizado dos alunos após aplicação em sala de aula. Através de métodos avaliativos e questionários pode-se verificar a eficiência dos métodos empregados. Uma segunda frente de estudos pode ser realizada com as funções polinomiais de grau maior que dois. Além da história das funções polinomiais ser muito rica, a dificuldade matemática para encontrar raízes pode ser amenizada com o uso do Geogebra para elaboração de gráficos com o cálculo de raízes aproximadas.

Referências

BORBA, M.C.; da SILVA, R.S.R.; GADANIDIS,G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática.**1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2004.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): educação é a base**. Brasília, DF: MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática (PCN)**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

BRAVIANO, G.; RODRIGUES, M. H. W. L. **Geometria Dinâmica: Uma nova geometria.** Revista do Professor de Matemática (Sociedade Brasileira de Matemática), São Paulo, n.49,p.22-26.2002.

CALIXTO, L. B. G. **O Software GeoGebra na aprendizagem de função quadrática: uma experiencia no projeto "Elo" da associação dos moradores nova esperança São Mateus - ES**. 2019. (Trabalho de conclusão de curso) - Universidade Federal de Espirito Santo, São Mateus, 2019.

CHAVES, E.S. **Equação do segundo grau: aspectos históricos e contemporâneos.** 2018. (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Cuiabá, 2018.

D'AMBRÓSIO, B. S. **Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores**. Revista Brasileira de História da Matemática, São Paulo,n.1,p.399-406.2007.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática da teoria a prática: Uma breve Introdução da matemática e sua história.** 17.ed. São Paulo: Papirus Editora, 2009.

FRAGOSO, W. C. **Uma abordagem histórica da equação do 2° grau**. Revista do professor de matemática, Santa Maria,n.43,p.20-25.2000.

FLÓES R. A. **Estudos dos Métodos Históricos de Resolução de Equações do Segundo Grau**. Os desafios da escola pública Paranaense na perpectiva do Professor PDE. Produções Didático-Pedagógicas,Paraná,n.2,p.2-23.2013.

GEOGEBRA. **GeoGebra: Manual do usuário**. Acesso: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT, em 05 de outubro de 2021.

GRAVINA, M.A. **Geometria dinâmica. Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria.** Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte,p.1-13,1996.

GUEDES, G. E. **A equação quadrática e as contribuições de BHASKARA**. 2019. (Dissertação de mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,Curitiba,2019.

ROQUE T.; PITOMBEIRA J.B. **Tópicos de História da Matemática**. Acesso: http://www.professoresdematematica.com.br/wa\files/Topicos\20de\20Historia\20da\20Matematica\28PROFMAT\29\TatianaRoque\Pitombeira.pdf, em 08 de outubro de 2021.

TAJRA, S.F. **Informática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade**. 1.ed. São Paulo, Editora Érica Ltda, 2011.